بِسۡمِ اللّٰہِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ

ریاضی

نہم

Web version of PCTB textbook

پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ، لاہور

یہ نصابی کتاب پاکستان کے قومی نصاب 2023 کے عین مطابق ہے اور یہ بورڈ سے منظور شدہ ہے۔

جملہ حقوق پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ، لاہور کے پاس محفوظ ہیں۔ اس نصابی کتاب کا کوئی حصہ کاپی، ترجمہ، دوبارہ تیار یا امتحانی پرچے، گائیڈ بکس، کلیدی نوٹ اور مددگار کتابوں کی تیاری کے لیے استعمال نہیں کیا جا سکتا۔

فہرست

نمبر شمار	یونٹ	صفحہ نمبر
1	حقیقی اعداد	1
2	لوگارتھم	21
3	سیٹ اور تفاعل	37
4	تجزی اور الجبری مہارت	65
5	یک درجی مساواتیں اور غیر مساواتیں	82
6	تکونیات	97
7	محدداتی جیومیٹری	123
8	منطق	147
9	متشابہ اشکال	161
10	تفاعل کے گراف	185
11	لوسائی اور بناوٹ	200
12	معلوماتی معاملات	215
13	احتمال	243
	جوابات	260
	فرہنگ	279
	علامات	282
	لوگارتھم جدول	283

تجرباتی اشاعت

مصنفین: • محمد اختر شیرانی، سینئر ماہر مضمون • مدیحہ محمود، ماہر مضمون • غلام مرتضٰی، ماہر مضمون

مترجم: • محمد اشفاق بیگ، سینئر ماہر مضمون (ریٹائرڈ)، سکول ایجوکیشن ڈیپارٹمنٹ، لاہور • ماجد حمید، ماسٹر ٹرینر، پنجاب ایجوکیشن فاؤنڈیشن، لاہور

ایکسٹرنل ریویو کمیٹی

- ڈاکٹر ذوالفقار علی، سینئر ہیڈ ماسٹر گورنمنٹ ہائی سکول اقبال، گڑھی شاہو، لاہور
- محمد اکرم ساجد، پرنسپل (ریٹائرڈ) سکول ایجوکیشن ڈیپارٹمنٹ، لاہور
- تلمیز الرحمان، ماہر مضمون گورنمنٹ عارف ہائر سیکنڈری سکول، مصطفٰی آباد، لاہور
- عرفان حسین، ایس ایس ٹی، گورنمنٹ فرقان شہید ہائی سکول، شیخوپورہ

زیر نگرانی: • محمد اختر شیرانی، سینئر ماہر مضمون • مدیحہ محمود، ماہر مضمون • غلام مرتضٰی، ماہر مضمون

ڈائریکٹر (مسودات): محترمہ ریحانہ فرحت | ڈپٹی ڈائریکٹر (گرافکس): عائشہ صادق

کمپوزنگ: کامران افضال بٹ، عاطف مجید | لے آؤٹ اینڈ ڈیزائننگ: کامران افضال بٹ، عاطف مجید

Web version of PCTBtextbook

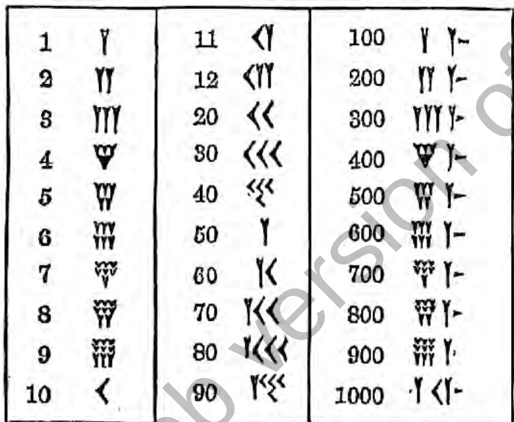
یونٹ
1

حقیقی اعداد (Real Numbers)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- مثالوں کے ساتھ وضاحت کر سکیں کہ کس طرح تاریخ میں تہذیبوں نے منظم طریقے سے جاندار چیزوں کا مطالعہ کیا ہے [مثال کے طور پر، سمیریوں کے اعداد کی تاریخ اور اس کا موجودہ عربی نظام میں ارتقاء]۔
- حقیقی اعداد کے سیٹ کو ناطق اور غیر ناطق اعداد کے مجموعہ کے طور پر بیان کر سکیں۔
- حقیقی اعداد کی مساوات اور غیر مساوات کی خصوصیات کی وضاحت اور تصدیق کر سکیں۔
- قوانین قوت نما کو استعمال کرتے ہوئے جذری جملے کو مختصر کر سکیں۔
- حقیقی اعداد کے تصورات کو حقیقی زندگی کے مسائل پر لاگو کر سکیں (جیسے درجہ حرارت، بینکاری، نفع و نقصان کی پیمائش، آمدنی اور اخراجات کے ذرائع)۔

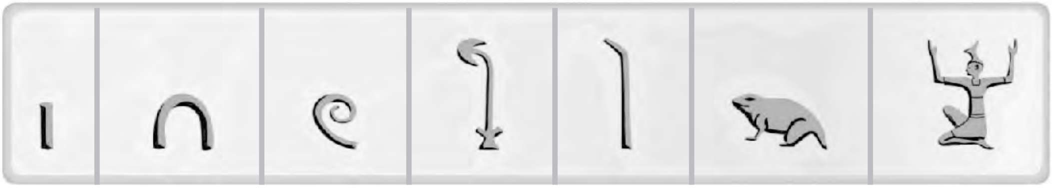
1.1 حقیقی اعداد کا تعارف (Introduction to Real Numbers)



قدیم تہذیب سے لے کر جدید عربی نظام تک اعداد کی تاریخ ہزاروں سال پر مشتمل ہے۔ یہاں اُس کا مختصر جائزہ لیتے ہیں:

سمیریوں (4500 تا 1900 قبل مسیح) نے گنتی کے لیے شستہ عددی نظام (اساس 60) کا استعمال کیا۔ سمیریوں نے ایک چھوٹی سی کون، موتی، بڑی کون، بڑی سوراخ دار کون، گولہ اور سوراخ دار گولہ استعمال کیا، جو بالترتیب 1، 10، 60، 600، 3600 اور 36000 سے مطابقت رکھتا تھا۔

مصریوں (3000 تا 2000 قبل مسیح) نے گنتی کے لیے اعشاری (اساس 10) نظام استعمال کیا۔ کچھ علامات جو مصریوں نے استعمال کیں انھیں نیچے دی گئی شکل میں دکھایا گیا ہے:



1   10   100   1,000   10,000   100,000   1,000,000

NOT FOR SALE-PESRP

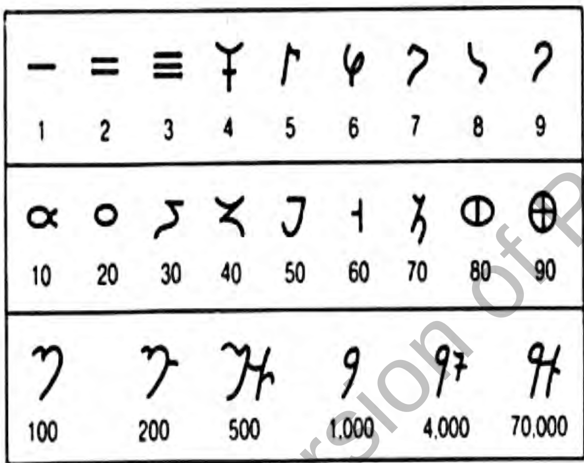
Web version of PCTB textbook

مصری عام طور پر اعداد کو بائیں سے دائیں لکھتے تھے جس کا آغاز سب سے بڑے مقامی قیمت کے ہندسے سے ہوتا تھا۔ مثال کے طور پر عدد 2525 لکھنے کے لیے پہلے 2000 پھر 500، 20 اور پھر 5 لکھا جائے گا۔

رومیوں (500 قبل مسیح تا 500 عیسوی) نے ریاضی کے لیے رومن اعداد کے نظام کا استعمال کیا۔

رومن اعداد ایک عددی نظام کو ظاہر کرتے ہیں جو قرونِ وسطیٰ کے آخر تک پورے یورپ میں معیاری تحریری نظام کے طور پر بڑے پیمانے پر استعمال کیا جاتا تھا۔ قدیم رومیوں نے وضاحت کی کہ جب ایک عدد 10 تک پہنچ جاتا ہے تو انگلیوں پر گننا آسان نہیں ہوتا ہے۔ لہٰذا، ایک مناسب عددی نظام بنانے کی ضرورت تھی جو تجارت اور مواصلات کے لیے استعمال کیا جا سکے۔ مختلف اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے رومن اعداد کے 7 حروف استعمال کیے جاتے ہیں۔ حروف یہ ہیں I، V، X، L، C، D اور M جو بالترتیب 1، 5، 10، 50، 100، 500 اور 1000 کو ظاہر کرتے ہیں۔

ہندوستانیوں (500 تا 1200 عیسوی) نے صفر (0) کا تصور پیش کیا اور اعشاری (اساس 10) کے عددی نظام میں اہم کردار ادا کیا۔



قدیم ہندوستانی ریاضی دانوں نے ریاضی کے میدان میں بہت بڑا حصہ ڈالا ہے۔ صفر کی ایجاد کا سہرا ہندوستانیوں کے سر جاتا ہے، اور یہ کارنامہ تمام دیگر اقوام کی ریاضی میں کی گئی کوششوں سے بڑھ کر ہے کیوں کہ یہ اعشاری عددی نظام کی بنیاد ہے، جس کے بغیر ریاضی میں کسی بھی ترقی کا تصور ممکن نہ تھا۔ آج جو عددی نظام استعمال کیا جا رہا ہے وہ ہندوستانیوں نے ایجاد کیا تھا اور اسے اب بھی ہند عربی (Indo Arabic) اعداد کہا جاتا ہے کیوں کہ اسے ہندوستانیوں نے دریافت کیا اور عرب تاجروں نے اسے مغربی دنیا تک پہنچایا۔

عربوں (800 تا 1500 عیسوی) نے یورپ میں عربی اعداد (0 تا 9) متعارف کرائے۔ اسلامی دنیا نے ریاضی میں نمایاں ترقی کی۔ محمد ابن موسیٰ الخوارزمی (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi) نے اس تبدیلی میں اہم کردار ادا کیا اور نویں صدی میں الجبرا کو ایک علیحدہ شعبے کے طور پر متعارف کرایا۔ الخوارزمی کے نقطہ نظر نے سابقہ ریاضیاتی روایات سے ہٹ کر الجبرا کی حروف و علامات کو اعداد و مقدار کے طور پر بنیاد فراہم کی جس نے طویل عرصے تک ریاضیاتی سوچ کو متاثر کیا۔ الکراجی (Al-Karaji) جیسے جانشینوں نے ان کے کام کو وسعت دی اور ریاضی کے مختلف شعبوں کی ترقی میں حصہ لیا۔ ان ریاضیاتی طریقوں کی عملی نوعیت اور وسیع اطلاق نے عربی ریاضیات کی مغرب میں پھیلاؤ میں مدد دی، جس نے مغربی ریاضی کے ارتقاء میں نمایاں کردار ادا کیا۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جدید دور (1700 عیسوی تا حال): جدید عددی نظام جیسے اساس 2 کا نظام اور اساس 16 کا نظام تیار کیا۔

عربی نظام آج دنیا بھر میں استعمال ہونے والے جدید اعشاری نظام کی بنیاد ہے۔ اس کی ترقی اور اصلاح میں قدیم سمیریوں سے لے کر جدید ریاضی دانوں تک ہزاروں سال شامل ہیں۔

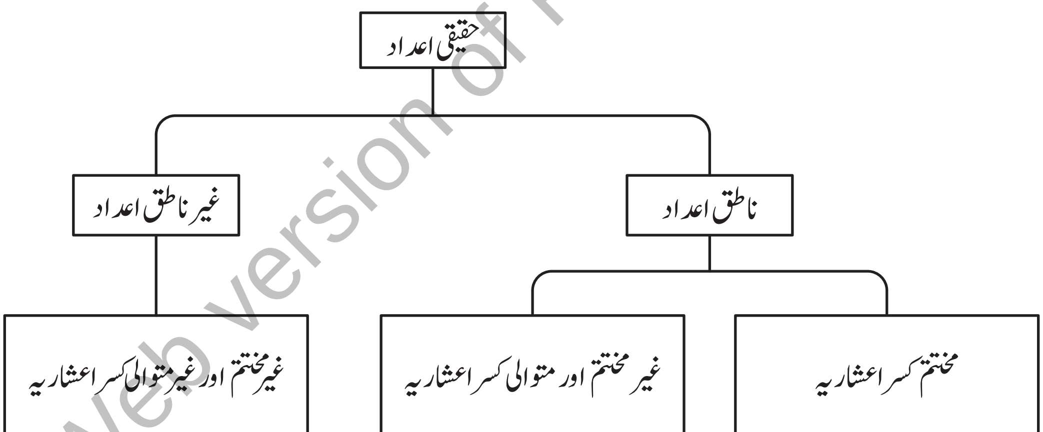
جدید دور میں، سیٹ $\{1, 2, 3, ...\}$ گنتی کے سیٹ کے طور پر اپنایا گیا تھا۔ یہ گنتی کا سیٹ قدرتی اعداد کے سیٹ کو ظاہر کرتا ہے جسے حقیقی اعداد کے سیٹ تک بڑھایا گیا تھا جو روزمرہ زندگی میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔

1.1.1 ناطق اور غیر ناطق اعداد کا امتزاج

(Combination of Rational and Irrational Numbers)

ہم جانتے ہیں کہ ناطق اعداد کے سیٹ کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے: $Q = \left\{\frac{p}{q}; p, q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ (Q') میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہیں لکھا جا سکتا۔ حقیقی اعداد کا سیٹ ناطق اور غیر ناطق اعداد کا یونین ہوتا ہے یعنی، $R = Q \cup Q'$



1.1.2 ناطق اعداد کا اعشاری اظہار (Decimal Representation of Rational Numbers)

(i) مختتم کسور اعشاریہ (Terminating Decimal Numbers)

ایسے اعشاری اعداد جن کے اعشاریہ کے بعد ہندسوں کی تعداد متناہی ہو مختتم کسور اعشاریہ کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\frac{4}{5} = 0.8$ ، $\frac{3}{8} = 0.375$ ، $\frac{8}{25} = 0.32$ ، $\frac{1}{4} = 0.25$ تمام مختتم کسور اعشاریہ ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ii) غیر مختتم اور متوالی کسور اعشاریہ (Non-Terminating and Recurring Decimal Numbers)

ایسے اعشاری اعداد جن میں اعشاریہ کے بعد ہندسوں کی تعداد لامتناہی ہو اور جس کے کسری حصے میں ہندسوں کی تکرار ایک ترتیب میں ہو غیر مختتم اور متوالی کسور اعشاریہ کہلاتے ہیں۔

مثلاً

$\frac{1}{3} = 0.333... = 0.\overline{3}$ (3 لامتناہی طور پر دہرایا جاتا ہے)

$\frac{1}{6} = 0.1666... = 0.1\overline{6}$ (6 لامتناہی طور پر دہرایا جاتا ہے)

$\frac{22}{7} = 3.142857142857... = 3.\overline{142857}$ (نمونہ 142857 لامتناہی طور پر دہرایا جاتا ہے)

$\frac{4}{9} = 0.44444... = 0.\overline{4}$ (4 لامتناہی طور پر دہرایا جاتا ہے)

غیر مختتم اور متوالی کسور اعشاریہ بھی ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

1.1.3 غیر ناطق اعداد کا اعشاری اظہار (Decimal Representation of Irrational Numbers)

ایسے اعشاری اعداد جو اعشاریہ کے بعد ہندسوں کے کسی نمونے کو دہراتے نہیں ہیں، وہ لامتناہی طور پر جاری رہتے ہیں اور کبھی ختم نہیں ہوتے غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔

غیر مختتم اور غیر متوالی کسور اعشاریہ کو غیر ناطق اعداد بھی کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر،

- $\pi = 3.1415926535897932...$
- $e = 2.71828182845904...$
- $\sqrt{2} = 1.41421356237309...$

> **یاد رکھیں!**
> $e = 2.7182...$ کو آیلر (Euler's) کا عدد کہا جاتا ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو ناطق یا غیر ناطق اعداد کے طور پر شناخت کریں:

(i) 0.35 (ii) 0.444... (iii) $3.\overline{5}$

(iv) 3.36788542... (v) 1.709975947...

حل:

(i) 0.35 مختتم کسر اعشاریہ ہے، لہٰذا یہ ایک ناطق عدد ہے۔

(ii) 0.444... ایک غیر مختتم اور متوالی کسر اعشاریہ ہے، لہٰذا یہ ایک ناطق عدد ہے۔

(iii) $3.\overline{5} = 3.5555...$ ایک غیر مختتم اور متوالی کسر اعشاریہ ہے، لہٰذا یہ ایک ناطق عدد ہے۔

(iv) 3.36788542... ایک غیر مختتم اور غیر متوالی کسر اعشاریہ ہے، لہٰذا یہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

(v) 1.709975947... ایک غیر مختتم اور غیر متوالی کسر اعشاریہ ہے، لہٰذا یہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

1.1.4 ناطق اور غیر ناطق اعداد کا عددی خط پر اظہار
(Representation of Rational and Irrational Numbers on Number Line)

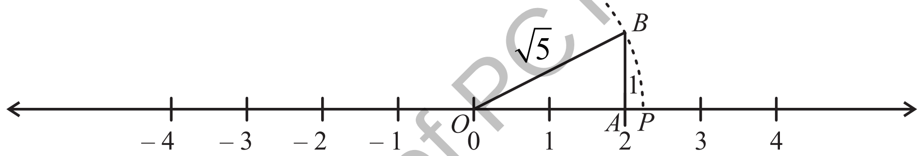
پچھلی جماعتوں میں ہم نے عددی خط پر ناطق اعداد کو ظاہر کرنا سیکھ لیا ہے۔ اب ہم اگلے مرحلے میں غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنا سیکھیں گے۔

مثال 2: $\sqrt{5}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل: $\sqrt{5}$ کو جیومیٹری شکل کے ذریعہ عددی خط پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جیسا کہ، $\sqrt{5} = 2.236...$ جو 2 کے قریب ہے۔ نقطہ A پر اکائی $m\overline{AB} = 1$ کا ایک خط کھینچیں، جہاں اکائیاں $m\overline{OA} = 2$ اور قائمۃ الزاویہ مثلث AOB ہے۔

مسئلہ فیثا غورث کا استعمال کرتے ہوئے

$$(m\overline{OB})^2 = (m\overline{OA})^2 + (m\overline{AB})^2$$
$$= (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad m\overline{OB} = \sqrt{5}$$



نقطہ O کو مرکز مان کر $m\overline{OB} = \sqrt{5}$ رداس کی ایک قوس کھینچیں جو نقطہ P پر ملے جو عددی خط پر $\sqrt{5}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ پس $|\overline{OP}| = \sqrt{5}$

> **یاد رکھیں!**
> (i) ناطق عدد + غیر ناطق عدد = غیر ناطق عدد
> (ii) ناطق عدد (غیر صفر) × غیر ناطق عدد = غیر ناطق عدد

مثال 3: درج ذیل متوالی کسور اعشاریہ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کریں جب کہ p اور q صحیح اعداد ہیں۔

(i) $0.\overline{5}$ (ii) $0.\overline{93}$

حل: (i) $0.\overline{5}$

فرض کریں $x = 0.\overline{5}$

$x = 0.55555\ldots \quad \ldots(i)$

دونوں طرف 10 سے ضرب دینے سے

$10x = 10(0.5555\ldots)$

$10x = 5.55555\ldots \quad \ldots(ii)$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مساوات (i) کو مساوات (ii) میں سے تفریق کرنے سے

$$10x - x = (5.55555\ldots) - (0.55555\ldots)$$

$$9x = 5$$

$x = \dfrac{5}{9}$ جو کہ $\dfrac{p}{q}$ کی شکل میں ہے۔

(ii) فرض کریں $x = 0.\overline{93}$

$$x = 0.939393\ldots \quad \ldots(i)$$

دونوں طرف 100 سے ضرب دینے سے

$$100x = 100\,(0.939393\ldots)$$

$$100x = 93.939393\ldots \quad \ldots(ii)$$

مساوات (i) کو مساوات (ii) میں سے تفریق کرنے سے

$$100x - x = 93.939393\ldots - 0.939393\ldots$$

$$99x = 93$$

$x = \dfrac{93}{99}$ جو کہ $\dfrac{p}{q}$ کی شکل میں ہے۔

مثال 4: 2 اور 3 کے درمیان دو ناطق اعداد معلوم کریں۔

حل: 2 اور 3 کے درمیان لامتناہی ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

ہم ان میں سے کوئی دو معلوم کرتے ہیں۔

اس کے لیے 2 اور 3 کا اوسط ایسے معلوم کریں $\dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$

لہٰذا 2 اور 3 کے درمیان $\dfrac{5}{2}$ ایک ناطق عدد ہے۔

2 اور 3 کے درمیان ایک اور ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے ہم دوبارہ 3 اور $\dfrac{5}{2}$ کا اوسط معلوم کریں گے۔

یعنی $$\frac{\frac{5}{2}+3}{2} = \frac{\frac{5+6}{2}}{2} = \frac{\frac{11}{2}}{2} = \frac{11}{4}$$

> **خود آزمائی!**
> دو غیر ناطق اعداد کا حاصل ضرب کیا ہو گا؟

لہٰذا 2 اور 3 کے درمیان دو ناطق اعداد $\dfrac{5}{2}$ اور $\dfrac{11}{4}$ ہیں۔

1.1.5 حقیقی اعداد کی خصوصیات (Properties of Real Numbers)

حقیقی اعداد کے تمام حسابی عوامل جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم حقیقی اعداد کی خصوصیات پر مبنی ہوتے ہیں۔ اس حصے میں ہم ان خصوصیات پر بحث کریں گے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حقیقی اعداد کی جمعی خصوصیات (Additive Properties of Real Numbers)

خاصیت کا نام	$\forall\, a, b, c \in R$	مثالیں
خاصیت بندش	$a+b \in R$	$2+3=5 \in R$
خاصیت مبادلہ	$a+b=b+a$	$2+5=5+2$ $7=7$
خاصیت تلازم	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$2+(3+5)=(2+3)+5$ $2+8=5+5$ $10=10$
جمعی ذاتی عنصر	$a+0=a=0+a$	$5+0=5=0+5$
جمعی معکوس	$a+(-a)=(-a)+a=0$	$6+(-6)=(-6)+6=0$

حقیقی اعداد کی ضربی خصوصیات (Multiplicative Properties of Real Numbers)

خاصیت کا نام	$\forall\, a, b, c \in R$	مثالیں
خاصیت بندش	$ab \in R$	$2\times 5=10 \in R$
خاصیت مبادلہ	$ab=ba$	$2\times 3=3\times 2=6 \in R$
خاصیت تلازم	$a(bc)=(ab)c$	$2\times(3\times 5)=(2\times 3)\times 5$ $2\times 15=6\times 5$ $30=30$
ضربی ذاتی عنصر	$a\times 1=1\times a=a$	$5\times 1=1\times 5=5$
ضربی معکوس	$a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$	$7\times\frac{1}{7}=\frac{1}{7}\times 7=1$

حقیقی اعداد کی تقسیمی خصوصیات (Distributive Properties of Real Numbers)

تمام حقیقی اعداد a، b، c کے لیے

(i) $a(b+c)=ab+ac$ کو ضرب کی بائیں خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع کہا جاتا ہے۔

(ii) $a(b-c)=ab-ac$ کو ضرب کی بائیں خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق کہا جاتا ہے۔

(iii) $(a+b)c=ac+bc$ کو ضرب کی دائیں خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع کہا جاتا ہے۔

(iv) $(a-b)c=ac-bc$ کو ضرب کی دائیں خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق کہا جاتا ہے۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

0 اور 1 بالترتیب حقیقی اعداد کے جمعی اور ضربی ذاتی عناصر ہیں۔

یاد رکھیں!

$0\in R$ کا کوئی ضربی معکوس نہیں ہوتا۔

Web version of PCTBtextbook

NOT FOR SALE-PESRP

حقیقی اعداد کی برابری کی خصوصیات (Properties of Equality of Real Numbers)

$\forall a \in R, \quad a = a$	خاصیتِ عکسی
$\forall a, b \in R, \ a = b \Rightarrow b = a$	خاصیت تشاکل
$\forall a, b, c \in R, \quad a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$	خاصیت متعدیت
$\forall a, b, c \in R, \ a = b \Rightarrow a + c = b + c$	جمعی خاصیت
$\forall a, b, c \in R, \quad a = b \Rightarrow ac = bc$	ضربی خاصیت
$\forall a, b, c \in R, \ a + c = b + c \Rightarrow a = b$	تنسیخی خاصیت بلحاظ جمع
$\forall a, b, c \in R$ اور $c \neq 0, \ ac = bc \Rightarrow a = b$	تنسیخی خاصیت بلحاظ ضرب

حقیقی اعداد کی نابرابری کی خصوصیات (Order Properties of Real Numbers)

$\forall a, b \in R$ تو $a = b$ یا $a > b$ یا $a < b$	ثلاثی خاصیت
$\forall a, b, c \in R$ • $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$ • $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$	خاصیت متعدیت
$\forall a, b, c \in R$ • $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ • $a < b \Rightarrow a + c < b + c$	جمعی خاصیت
$\forall a, b, c \in R$ • $a > b \Rightarrow ac > bc$ اگر $c > 0$ • $a < b \Rightarrow ac < bc$ اگر $c > 0$ • $a > b \Rightarrow ac < bc$ اگر $c < 0$ • $a < b \Rightarrow ac > bc$ اگر $c < 0$ • $a > b \wedge c > d \Rightarrow ac > bd$ • $a < b \wedge c < d \Rightarrow ac < bd$	ضربی خاصیت
$\forall a, b, c \in R$ • $a < b \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ اگر $c > 0$ • $a < b \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ اگر $c < 0$ • $a > b \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ اگر $c > 0$ • $a > b \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ اگر $c < 0$	تقسیمی خاصیت

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

$\forall\ a, b \in R$ اور دونوں کی ایک ہی علامت ہو • $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ • $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	ضربی معکوس خاصیت

مثال5: اگر $a = \frac{2}{3}$ ، $b = \frac{3}{2}$ ، $c = \frac{5}{3}$ ہو تو خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع کو ثابت کریں۔

حل: (i) ضرب کی بائیں خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$\text{LHS} = a(b+c) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{9+10}{6}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{19}{6}\right) = \frac{19}{9}$$

$$\text{RHS} = ab + ac = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = 1 + \frac{10}{9} = \frac{9+10}{9} = \frac{19}{9}$$

LHS = RHS

پس ثابت ہوا کہ $a(b + c) = ab + ac$

(ii) ضرب کی دائیں خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

$$(a+b)c = ac + bc$$

$$\text{LHS} = (a+b)c = \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)\frac{5}{3} = \left(\frac{4+9}{6}\right)\frac{5}{3} = \left(\frac{13}{6}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{65}{18}$$

$$\text{RHS} = ac + bc = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{10}{9} + \frac{15}{6} = \frac{20+45}{18} = \frac{65}{18}$$

LHS = RHS

پس ثابت ہوا کہ $(a + b)c = ac + bc$

مثال6: بیان کو درست ثابت کرنے والی خاصیت کی نشان دہی کریں۔

(i) اگر $a > 13$ ہو تو $a + 2 > 15$

(ii) اگر $9 > 3$ اور $12 > 6$ ہو تو $9 < 21$

(iii) اگر $4 > 7$ اور $3 > 5$ ہو تو $35 > 12$

(iv) اگر $-4 < -5 \Leftarrow 20 > 16$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل: (i) $a > 13$

دونوں اطراف میں 2 جمع کرنے سے

$a + 2 > 13 + 2$

$a + 2 > 15$ (نابرابری کی جمعی خاصیت)

(ii) جیسا کہ $3 < 9$ اور $6 < 12$

$\Rightarrow \quad 3 + 6 < 9 + 12$

$9 < 21$ (نابرابری کی جمعی خاصیت)

(iii) $5 > 3$ اور $7 > 4$

$\Rightarrow \quad 7 \times 5 > 4 \times 3$

$\Rightarrow \quad 35 > 12$ (نابرابری کی ضربی خاصیت)

(iv) جیسا کہ $-5 < -4$

دونوں اطراف کو -4 سے ضرب دینے سے

$(-5) \times (-4) > (-4) \times (-4)$

$\Rightarrow \quad 20 > 16$ (نابرابری کی ضربی خاصیت)

Web version of PCTB textbook

مشق 1.1

1۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کو ناطق یا غیر ناطق اعداد کے طور پر شناخت کریں:

(i) 2.353535 (ii) $0.\overline{6}$ (iii) $2.236067...$ (iv) $\sqrt{7}$

(v) e (vi) π (vii) $5+\sqrt{11}$ (viii) $\sqrt{3}+\sqrt{13}$

(ix) $\frac{15}{4}$ (x) $(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$

2۔ درج ذیل اعداد کو عددی خط پر ظاہر کریں:

(i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $4\frac{1}{3}$

(iv) $-2\frac{1}{7}$ (v) $\frac{5}{8}$ (vi) $2\frac{3}{4}$

3۔ درج ذیل متوالی کسور اعشاریہ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کریں جب کہ p اور q صحیح اعداد ہیں اور q ایک غیر صفر عدد ہے:

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $0.\overline{21}$

NOT FOR SALE-PESRP

4۔ درج ذیل میں استعمال ہونے والی خاصیت کا نام بتائیں:

(i) $(a + 4) + b = a + (4 + b)$　　(ii) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

(iii) $x - x = 0$　　(iv) $a(b + c) = ab + ac$

(v) $16 + 0 = 16$　　(vi) $100 \times 1 = 100$

(vii) $4 \times (5 \times 8) = (4 \times 5) \times 8$　　(viii) $ab = ba$

5۔ درج ذیل میں استعمال ہونے والی خاصیت کا نام بتائیں:

(i) $-3 < -1 \Rightarrow 0 < 2$　　(ii) اگر $a < b$ ہو تو $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(iii) اگر $a < b$ ہو تو $a + c < b + c$　　(iv) اگر $ac < bc$ اور $c > 0$ ہو تو $a < b$

(v) اگر $ac < bc$ اور $c < 0$ ہو تو $a > b$　　(vi) $a < b$ یا $a = b$ یا $a > b$

6۔ درج ذیل کے درمیان دو ناطق اعداد معلوم کریں:

(i) $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{4}$　　(ii) 3 اور 4　　(iii) $\frac{3}{5}$ اور $\frac{4}{5}$

1.2 جذری جملے (Radical Expressions)

اگر n ایک صحیح مثبت عدد ہو جو کہ 1 سے بڑا ہے اور a ایک حقیقی عدد ہو تو کوئی بھی حقیقی عدد x جب کہ $x = \sqrt[n]{a}$ کو a کا n واں جذر کہیں گے۔

یہاں $\sqrt{\ }$ جذر کی علامت کہلاتی ہے اور n کو جذر کا قوت نما کہا جاتا ہے۔ ایک حقیقی عدد جو جذر کی علامت کے نیچے ہو، اسے مجذور کہا جاتا ہے۔ $\sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{7}$ جذری شکل کی مثالیں ہیں۔

$x = \sqrt[n]{a}$ کی قوت نمائی شکل $x = (a)^{\frac{1}{n}}$ ہے۔

1.2.1 جذر اور قوت نما کے قوانین (Laws of Radicals and Indices)

قوت نما کے قوانین	جذر کے قوانین
(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$　(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$	(i) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$　(ii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
(iii) $(ab)^n = a^n b^n$　(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	(iii) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
(v) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　(vi) $a^0 = 1$	(iv) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a$

مثال 7: درج ذیل کو مختصر کیجیے:

(i) $\sqrt[4]{16x^4 y^8}$　　(ii) $\sqrt[3]{27x^6 y^9 z^3}$　　(iii) $(64)^{-\frac{4}{3}}$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

حل: (i) چوں کہ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$$\sqrt[4]{16x^4y^8} = (16x^4y^8)^{\frac{1}{4}}$$

چوں کہ $(ab)^m = a^m b^m$

$$= (16)^{\frac{1}{4}}(x^4)^{\frac{1}{4}}(y^8)^{\frac{1}{4}}$$

چوں کہ $(a^m)^n = a^{mn}$

$$= 2^{4\cdot\frac{1}{4}} \times x^{4\cdot\frac{1}{4}} \times y^{8\cdot\frac{1}{4}}$$

$$= 2xy^2$$

(ii) چوں کہ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$$\sqrt[3]{27x^6y^9z^3} = \left(27x^6y^9z^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

چوں کہ $(ab)^m = a^m b^m$

$$= (27)^{\frac{1}{3}}\left(x^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(y^9\right)^{\frac{1}{3}}\left(z^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(y^9\right)^{\frac{1}{3}}\left(z^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

چوں کہ $(a^m)^n = a^{mn}$

$$= 3^{3\times\frac{1}{3}} \cdot x^{6\times\frac{1}{3}} \cdot y^{9\times\frac{1}{3}} . z^{3\times\frac{1}{3}}$$

$$= 3x^2y^3z$$

(iii)

$$(64)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{(64)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{1}{4^{3\times\frac{4}{3}}} = \frac{1}{4^4}$$

$$= \frac{1}{256}$$

1.2.2 مقادیر اصم اور ان کا اطلاق (Surds and their Applications)

ایک غیر ناطق رقم جس میں جذری علامت کے نیچے ناطق رقم ہو اسے مقادیر اصم کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر اگر ہم کسی بھی ناطق عدد کا nواں جذر لیتے ہیں تو $\sqrt[n]{a}$ ایک مقادیر اصم ہے۔ $\sqrt{5}$ یہ ایک مقادیر اصم ہے کیوں کہ 5 کا جذر ایک مکمل عدد نہیں ہے، لیکن $\sqrt{9}$ ایک مقادیر اصم نہیں ہے کیوں کہ اس کا جواب مکمل عدد 3 ہے اور ہمارا نتیجہ غیر ناطق عدد نہیں ہے۔ لہٰذا، جذر $\sqrt[n]{a}$ غیر ناطق ہے۔ $\sqrt{7}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{11}$ مقادیر اصم ہیں، لیکن $\sqrt{\pi}, \sqrt{e}$ مقادیر اصم نہیں ہیں۔

یاد رکھیں!

ہر مقادیر اصم ایک غیر ناطق عدد ہوتا ہے لیکن ہر غیر ناطق عدد ایک مقادیر اصم نہیں ہوتا، مثال کے طور پر $\sqrt{\pi}$ ایک مقادیر اصم نہیں ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مقادیر اصم کی مختلف اقسام مندرجہ ذیل ہیں:

(i) ایک مقادیر اصم جس میں ایک ہی رقم ہوتی ہے اسے یک رقمی مقادیر اصم کہا جاتا ہے مثلاً، $\sqrt{5}, \sqrt{7}$ وغیرہ۔

(ii) ایک مقادیر اصم جو دو یک رقمی مقادیر اصم کا مجموعہ ہو اسے دو رقمی مقادیر اصم کہا جاتا ہے مثلا، $\sqrt{3}+\sqrt{5}, \sqrt{2}+\sqrt{7}$ وغیرہ۔

(iii) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ اور $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ایک دوسرے کے کانجوگیٹ مقادیر اصم کہلاتے ہیں۔

> **یاد رکھیں!**
> دو کانجوگیٹ (زوج) مقادیر اصم کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔

1.2.3 مخرج کو ناطق بنانا (Rationalization of Denominator)

کسی مخرج کو جس کی شکل $a+b\sqrt{x}$ یا $a-b\sqrt{x}$ ہو ناطق بنانے کے لیے، ہم شمار کنندہ اور مخرج دونوں کو اس کے کانجوگیٹ سے ضرب دیتے ہیں۔

مثال 8: درج ذیل کے مخرج کو ناطق بنائیں:

(i) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

حل: (i)

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

(ii)

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}$$

$$=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$$

مشق 1.2

1۔ درج ذیل کے مخرج کو ناطق بنائیں:

(i) $\dfrac{13}{4+\sqrt{3}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(iv) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ (v) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (vi) $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

2۔ درج ذیل کو مختصر کیجیے:

(i) $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\div\left(\frac{4}{9}\right)^{3}\times\frac{16}{27}$ (iii) $(0.027)^{-\frac{1}{3}}$

(iv) $\sqrt[7]{\frac{x^{14}\times y^{21}\times z^{35}}{y^{14}z^{7}}}$ (v) $\frac{5.(25)^{n+1}-25.(5)^{2n}}{5.(5)^{2n+3}-(25)^{n+1}}$

(vi) $\frac{(16)^{x+1}+20(4^{2x})}{2^{x-3}\times 8^{x+2}}$ (vii) $(64)^{-\frac{2}{3}}\div(9)^{-\frac{3}{2}}$

(viii) $\frac{3^{n}\times 9^{n+1}}{3^{n-1}\times 9^{n-1}}$ (ix) $\frac{5^{n+3}-6.5^{n+1}}{9\times 5^{n}-4\times 5^{n}}$

3۔ اگر $x = 3 + \sqrt{8}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے:

(i) $x+\frac{1}{x}$ (ii) $x-\frac{1}{x}$ (iii) $x^{2}+\frac{1}{x^{2}}$

(iv) $x^{2}-\frac{1}{x^{2}}$ (v) $x^{4}+\frac{1}{x^{4}}$ (vi) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2}$

4. اگر $p+q\sqrt{2}=\frac{8-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$ ہو تو ناطق اعداد p اور q معلوم کریں۔

5. درج ذیل کو مختصر کیجیے:

(i) $\frac{(25)^{\frac{3}{2}}\times(243)^{\frac{3}{5}}}{(16)^{\frac{5}{4}}\times(8)^{\frac{4}{3}}}$ (ii) $\frac{54\times\sqrt[3]{(27)^{2x}}}{9^{x+1}+216(3^{2x-1})}$

(iii) $\sqrt{\frac{(216)^{\frac{2}{3}}\times(25)^{\frac{1}{2}}}{(0.04)^{\frac{-3}{2}}}}$ (iv) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\times\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)$

1.3 روزمرہ زندگی میں حقیقی اعداد کا اطلاق

(Application of Real Numbers in Daily Life)

حقیقی اعداد ہماری روزمرّہ زندگی میں انتہائی مفید ہیں۔ اس کی شاید ایک اہم وجہ ہے کہ ہم بہت چھوٹی عمر سے گنتی، جمع اور تفریق کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم اعداد کے بغیر زندگی کا تصور نہیں کر سکتے۔

Web version of PCTB textbook
NOT FOR SALE-PESRP

حقیقی اعداد مختلف شعبوں میں استعمال ہوتے ہیں بشمول

- سائنس اور انجینئرنگ (طبیعیات، میکانی نظام، برقی سرکٹ)
- ماحولیاتی سائنس (آب و ہوا کی تبدیلی، آلودگی کی نگرانی وغیرہ)
- کمپیوٹر سائنس (الگورتھم ڈیزائن، ڈیٹا کمپریشن، گرافک رینڈرنگ)
- جہاز رانی اور نقل و حمل (GPS، پرواز کی منصوبہ بندی)
- طب اور صحت
- سروے اور فن تعمیر
- شماریات

مثال 9: دو حقیقی اعداد کا مجموعہ 8 اور ان کا فرق 2 ہو تو اعداد معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ a اور b دو حقیقی اعداد ہوں تو

$$a + b = 8 \quad \ldots(i)$$
$$a - b = 2 \quad \ldots(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

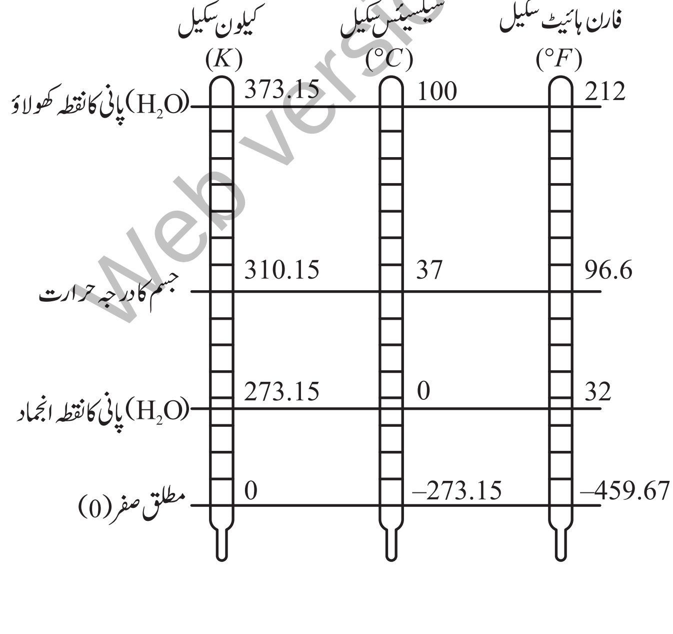
$$2a = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 5$$

a کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$5 - b = 2 \quad \Rightarrow \quad -b = 2 - 5 \Rightarrow -b = -3 \Rightarrow b = 3$$

پس 5 اور 3 مطلوبہ حقیقی اعداد ہیں۔

1.3.1 درجہ حرارت کی تبدیلیاں (Temperature Conversions)



دی گئی شکل میں تین قسم کے تھرمامیٹر دکھائے گئے ہیں۔ ہم تینوں درجہ حرارت کے پیمانے سیلسیئس، فارن ہائیٹ اور کیلون کو ایک دوسرے کے ساتھ تبدیل کر سکتے ہیں۔

تبدیلی کے کلیے ذیل میں دیے گئے ہیں:

$$K = {}^\circ C + 273 \qquad (i)$$

$$^\circ C = \frac{5}{9}(F - 32)^\circ \qquad (ii)$$

$$^\circ F = \frac{9^\circ C}{5} + 32 \qquad (iii)$$

یہاں K، $^\circ C$ اور $^\circ F$ بالترتیب کیلون، سیلسیئس اور فارن ہائیٹ پیمانوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 10: عام انسانی جسم کا درجہ حرارت $98.6\ °F$ ہے۔ اسے سیلسیئس اور کیلون اسکیل میں تبدیل کریں۔

حل: ہمیں دیا گیا ہے $°F = 98.6$

لہٰذا اسے سیلسیئس پیمانے میں تبدیل کرنے کے لیے ہم درجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$°C = \frac{5}{9}(F-32)$$

$$°C = \frac{5}{9}(98.6-32)$$

$$= \frac{5}{9}(66.6)$$

$$= (0.55)(66.6)$$

$$°C = 37$$

لہٰذا سیلسیئس پیمانے پر انسانی جسم کا عام درجہ حرارت $37°$ ہے۔

اب ہم اسے کیلون اسکیل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$K = C + 273$$

$$K = 37° + 273$$

$K = 310$ کیلون

1.3.2 نفع اور نقصان (Profit and Loss)

تاجر منافع کما سکتے ہیں یا نقصان اٹھا سکتے ہیں۔ نفع اور نقصان کاروبار کا حصہ ہیں۔ نفع اور نقصان کا حساب مندرجہ ذیل کلیوں سے لگایا جا سکتا ہے:

(i) قیمت خرید – قیمت فروخت = نفع

$$\text{نفع فی صد} = \left(\frac{\text{منافع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100\right)\%$$

(ii) قیمت فروخت – قیمت خرید = نقصان

$$\text{نقصان فی صد} = \left(\frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100\right)\%$$

مثال 11: جمیل نے ایک سائیکل 6,590 روپے میں خریدی اور 6,850 روپے میں فروخت کر دی۔ نفع فی صد معلوم کریں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

حل:
قیمتِ خرید = 6,590 روپے
قیمتِ فروخت = 6,850 روپے
نفع = قیمت فروخت − قیمت خرید
= 6,850 − 6,590
= 260 روپے

اب ہم نفع فی صد معلوم کرتے ہیں۔

$$\text{نفع فی صد} = \left(\frac{\text{منافع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{260 \times 100}{6,590}\right)\%$$

$$= 3.94\%$$

$$\approx 4\%$$

مثال 12: عمیر نے ایک کتاب 850 روپے میں خریدی اور اسے 720 روپے میں فروخت کر دیا۔ اس کا نقصان فی صد کیا تھا؟

حل:
کتاب کی قیمت خرید = 850 روپے
کتاب کی قیمت فروخت = 720 روپے
نقصان = قیمت خرید − قیمت فروخت
= 850 − 720
= 130 روپے

$$\text{نقصان فی صد} = \left(\frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{130}{850} \times 100\right)\%$$

$$= 15.29\%$$

مثال 13: سلیم، ندیم اور تنویر نے ایک کاروبار سے 450,000 روپے کا منافع کمایا۔ اگر کاروبار میں ان کی سرمایہ کاری میں نسبت بالترتیب 4:7:14 ہو تو ہر ایک کا منافع معلوم کریں۔

حل:
حاصل شدہ منافع = 450,000 روپے
سرمایہ کاری میں نسبت = 4 : 7 : 14
نسبتی مجموعہ = 4 + 7 + 14
= 25

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

سلیم کا منافع $= \frac{4}{25} \times 450,000 = 72,000$ روپے

ندیم کا منافع $= \frac{7}{25} \times 450,000 = 126,000$ روپے

تنویر کا منافع $= \frac{14}{25} \times 450,000 = 252,000$ روپے

پس سلیم، ندیم اور تنویر نے بالترتیب 72,000روپے، 126,000روپے اور 252,000روپے منافع کمایا۔

مثال14: اگر 12 سال کے لیے 6,400روپے پر سادہ منافع 3,840روپے ہو تو منافع کی شرح معلوم کریں۔

حل:

اصل رقم = 6,400روپے

سادہ منافع = 3,840 روپے

وقت = 12 سال

شرح معلوم کرنے کے لیے ہم درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں:

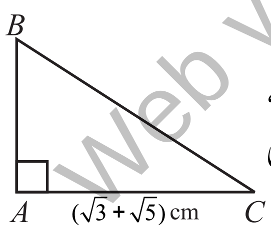
$$\text{شرح} = \frac{\text{نفع کی رقم} \times 100}{\text{اصل رقم} \times \text{وقت}}$$

$$= \frac{3,840 \times 100}{12 \times 6,400} = 5\%$$

اس طرح منافع کی شرح 5% ہے۔

مشق 1.3

1۔ تین مسلسل صحیح اعداد کا مجموعہ 42 ہو تو اعداد معلوم کریں۔



2۔ شکل میں قائمۃ الزاویہ ΔABC دکھائی گئی ہے جس میں $\overline{AC}$ کی لمبائی $(\sqrt{3}+\sqrt{5})$cm ، ΔABC کا رقبہ $(1+\sqrt{15})\ \text{cm}^2$ ہے۔ ضلع $\overline{AB}$ کی لمبائی کو $(a\sqrt{3}+b\sqrt{5})$ cm کی صورت میں معلوم کریں، جہاں a اور b صحیح اعداد ہیں۔

3۔ ایک مستطیل کے اضلاع کی لمبائیاں $2+\sqrt{18}$ m اور $\left(5-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ m ہیں۔ مستطیل کے رقبے کو $a+b\sqrt{2}$ کی شکل میں ظاہر کریں، جہاں a اور b صحیح اعداد ہیں۔

4۔ دو اعداد معلوم کریں جن کا مجموعہ 68 اور فرق 22 ہے۔

5۔ 2024 کے موسم گرما کے دوران لاہور میں موسم غیر معمولی طور پر گرم تھا۔ ٹی وی نیوز نے درجہ حرارت 48 ڈگری سینٹی گریڈ

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

تک پہنچنے کی اطلاع دی۔ کلیہ ($°F = \frac{9}{5}°C + 32$) کا استعمال کرتے ہوئے درجہ حرارت کو فارن ہائیٹ اسکیل میں معلوم کریں۔

6۔ باپ اور بیٹے کی عمر کا مجموعہ 72 سال ہے۔ چھے سال پہلے باپ کی عمر بیٹے سے دو گنا تھی۔ چھے سال پہلے بیٹے کی عمر کیا تھی؟

7۔ مِرحا نے ایک کھلونا 1,500 روپے میں خریدا اور 1,520 روپے میں فروخت کیا۔ اس کا منافع فیصد کیا تھا؟

8۔ طیب کی سالانہ آمدنی 960,000 روپے ہے، جب کہ مستثنیٰ رقم 130,000 روپے ہے۔ 0.75% کی شرح سے اسے کتنا ٹیکس ادا کرنا پڑے گا؟

9۔ 375,000 روپے پر ایک سال کے لیے 14% کی شرح سے سالانہ منافع معلوم کریں۔

جائزہ مشق 1

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) $\sqrt{7}$ ہے:

(a) صحیح عدد (b) ناطق عدد
(c) غیر ناطق عدد (d) قدرتی عدد

(ii) π اور e ہیں:

(a) قدرتی اعداد (b) صحیح اعداد
(c) ناطق اعداد (d) غیر ناطق اعداد

(iii) اگر n ایک مکمل مربع نہیں ہے، تو $\sqrt{n}$ ہے:

(a) ناطق عدد (b) قدرتی عدد
(c) صحیح عدد (d) غیر ناطق عدد

(iv) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ہے:

(a) مکمل عدد (b) صحیح عدد
(c) ناطق عدد (d) غیر ناطق عدد

(v) $x = x, \forall x \in R$ خاصیت کہلاتی ہے:

(a) عکسی خاصیت (b) متعدیت خاصیت
(c) تشاکل خاصیت (d) ثلاثی خاصیت

(vi) فرض کریں $a, b, c \in R$ اگر $a > b$ اور $b > c$ تو $a > c$ یہ خاصیت _________ کہلاتی ہے۔

(a) ثلاثی (b) متعدیت (c) جمعی (d) ضربی

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(vii) $2^x \times 8^x = 64$ ہو تو x برابر ہے:

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{2}{3}$

(viii) فرض کریں $a, b \in R$ تو $a = b$ اور $b = a$ خاصیت ______ کہلاتی ہے۔

(a) عکسی (b) تشاکل

(c) متعدیت (d) جمعی

(ix) $\sqrt{75} + \sqrt{27} =$ ______

(a) $\sqrt{102}$ (b) $9\sqrt{3}$ (c) $5\sqrt{3}$ (d) $8\sqrt{3}$

(x) $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$ کا حاصل ضرب ہے:

(a) مفرد عدد (b) طاق عدد

(c) غیر ناطق عدد (d) ناطق عدد

2۔ اگر $a = \frac{3}{2}$، $b = \frac{5}{3}$ اور $c = \frac{7}{5}$ ہو تو ثابت کیجیے۔

(i) $a(b + c) = ab + ac$ (ii) $(a + b)c = ac + bc$

3۔ اگر $a = \frac{4}{3}$، $b = \frac{5}{2}$ اور $c = \frac{7}{4}$ ہو تو حقیقی اعداد کی خاصیت تلازم بلحاظ جمع اور ضرب کو ثابت کیجیے۔

4۔ کیا صفر (0) ایک ناطق عدد ہے؟ وضاحت کریں۔

5۔ حقیقی اعداد کی ثلاثی خاصیت بیان کریں۔

6۔ 4 اور 5 کے درمیان دو ناطق اعداد معلوم کریں۔

7۔ درج ذیل کو مختصر کیجیے:

(i) $\sqrt[5]{\frac{x^{15}y^{35}}{z^{20}}}$ (ii) $\sqrt[3]{(27)^{2x}}$ (iii) $\frac{6(3)^{n+2}}{3^{n+1} - 3^n}$

8۔ تین مسلسل صحیح طاق اعداد کا مجموعہ 51 ہو تو اعداد معلوم کریں۔

9۔ عبداللہ نے 96 گیندیں اٹھائیں اور انہیں دو ٹوکریوں میں رکھا۔ ایک ٹوکری میں دوسری ٹوکری کے مقابلے میں 28 گیندیں زیادہ ہیں۔ ہر ٹوکری میں کتنی گیندیں تھیں؟

10۔ سلمٰی نے ایک بینک میں 350,000 روپے کی سرمایہ کاری کی جو سادہ منافع $7\frac{1}{4}\%$ سالانہ کی شرح سے ادا کرتا تھا۔ 2 سال بعد اس شرح کو بڑھا کر 8% سالانہ کر دیا گیا۔ معلوم کریں کہ 7 سال کے اختتام پر اس کے پاس کتنی رقم تھی؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ
2

لوگارتھم (Logarithms)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- عام ترقیم میں دیے گئے اعداد کو سائنسی ترقیم میں اور اس کے برعکس لکھ سکیں۔
- ایک عدد کے لوگارتھم کی وضاحت کر سکیں۔
- عام اور قدرتی لوگارتھم کے درمیان فرق معلوم کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

لوگارتھم ایک طاقت ور ریاضیاتی آلہ ہے جو پیچیدہ حساب کتاب کو آسان بنانے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ خاص طور پر وہ حساب کتاب جو تیزی سے بڑھنے یا کم ہونے کے عمل سے متعلق ہوں۔ اس کا استعمال بینک کاری، سائنس، انجینئرنگ اور انفارمیشن ٹیکنالوجی سمیت مختلف شعبوں میں وسیع پیمانے پر ہوتا ہے۔ کیمسٹری میں pH اسکیل جو کسی محلول کی تیزابیت یا اساسیت کی پیمائش کرتا ہے وہ لوگارتھم پر مبنی ہوتا ہے۔ یہ غیر خطی مواد کو تجزیے کے لیے خطی شکل میں تبدیل کرنے، قوت نمائی مساواتوں کو حل کرنے اور بہت بڑے یا چھوٹے اعداد کو مؤثر طریقے سے حل کرنے میں مدد کرتا ہے۔

2.1 سائنسی ترقیم (Scientific Notation)

سائنسی ترقیم ایک ایسا طریقہ ہے جو بہت بڑے یا بہت چھوٹے اعداد کو زیادہ آسان شکل میں ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ عام طور پر سائنس، انجینئرنگ اور ریاضی میں پیچیدہ حساب کتاب کو آسان بنانے میں استعمال ہوتا ہے۔

سائنسی ترقیم میں ایک عدد کو $a \times 10^n$ لکھا جاتا ہے۔ جبکہ $1 \leq a < 10$ اور n ایک صحیح عدد ہے۔ یہاں "a" عدد کی سر یا بنیادی عدد کہلاتا ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> اگر عدد 1 سے بڑا ہو تو n مثبت ہے اور اگر عدد 1 سے چھوٹا ہو تو n منفی ہوتا ہے۔

2.1.1 اعداد کو عام ترقیم سے سائنسی ترقیم میں تبدیل کرنا

(Conversion of Numbers from Ordinary Notation to Scientific Notation)

مثال 1: 78,000,000 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل:

مرحلہ 1: 1 اور 10 کے درمیان عدد حاصل کرنے کے لیے اعشاریہ کو منتقل کیجیے: 7.8

مرحلہ 2: اعشاریہ کو جتنے مقامات پر آپ نے منتقل کیا ہے، ان کی تعداد گنیے: 7 مقامات

مرحلہ 3: سائنسی ترقیم میں لکھیے: $78,000,000 = 7.8 \times 10^7$

چوں کہ ہم نے اعشاریہ کو بائیں طرف منتقل کیا ہے اس لیے قوت نما مثبت ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 2: 0.0000000315 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: **مرحلہ 1:** 1 اور 10 کے درمیان عدد حاصل کرنے کے لیے اعشاریہ کو منتقل کیجیے: 3.15

مرحلہ 2: اعشاریہ کو جتنے مقامات پر آپ نے منتقل کیا ہے، ان کی تعداد گنیے: 8 مقامات

مرحلہ 3: سائنسی ترقیم میں لکھیے:

$0.0000000315 = 3.15 \times 10^{-8}$

چوں کہ ہم نے اعشاریہ کو دائیں طرف منتقل کیا ہے اس لیے قوت نما منفی ہے۔

> **خود آزمائی!**
> درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں تبدیل کریں:
> (i) 29,000,000
> (ii) 0.000006

2.1.2 اعداد کو سائنسی ترقیم سے عام ترقیم میں تبدیل کرنا

(Conversion of Numbers from Scientific Notation to Ordinary Notation)

مثال 3: 3.47×10^6 کو عام ترقیم میں لکھیے۔

حل: **مرحلہ 1:** حصوں کی شناخت کریں: عدد: 3.47

قوت نما: 6

مرحلہ 2: چوں کہ قوت نما مثبت 6 ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ کو 6 مقامات دائیں طرف منتقل کیجیے۔ $3.47 \times 10^6 = 3,470,000$

> **یاد رکھیے!**
> اگر قوت نما مثبت ہے تو اعشاریہ دائیں طرف منتقل ہو گا۔ اگر قوت نما منفی ہے تو اعشاریہ بائیں طرف منتقل ہو گا۔

> **خود آزمائی!**
> درج ذیل کو عام ترقیم میں تبدیل کریں:
> (i) 5.63×10^3
> (ii) 6.6×10^{-5}

مثال 4: 6.23×10^{-4} کو عام ترقیم میں لکھیے۔

حل: **مرحلہ 1:** حصوں کی شناخت کریں: عدد: 6.23

قوت نما: 4 −

مرحلہ 2: چوں کہ قوت نما منفی 4 ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ کو 4 مقامات بائیں طرف منتقل کیجیے۔

$6.23 \times 10^{-4} = 0.000623$

مشق 2.1

1۔ درج ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیے:

(i) 2000000 (ii) 48900 (iii) 0.0042
(iv) 0.0000009 (v) 73×10^3 (vi) 0.65×10^2

2۔ درج ذیل کو عام ترقیم میں لکھیے:

(i) 8.04×10^2 (ii) 3×10^5 (iii) 1.5×10^{-2}
(iv) 1.77×10^7 (v) 5.5×10^{-6} (vi) 4×10^{-5}

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

3۔ روشنی کی رفتار تقریباً 3×10^8 میٹر فی سیکنڈ ہے۔ اسے عام ترقیم میں لکھیے۔

4۔ خط استوا پر زمین کا محیط 40،075،000 میٹر ہے۔ اس کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

5۔ مریخ کا قطر 6.779×10^3 کلومیٹر ہے۔ اس عدد کو عام ترقیم میں لکھیے۔

6۔ زمین کا قطر 1.2756×10^4 کلومیٹر ہے۔ اس عدد کو عام ترقیم میں لکھیے۔

2.2 لوگارتھم (Logarithm)

لوگارتھم دو یونانی الفاظ logos اور arithmos پر مشتمل ہے جس کا مطلب نسبت یا تناسب ہے۔ اسکاٹ لینڈ کے ریاضی دان جان نیپیئر (John Napier) نے لوگارتھم کا لفظ متعارف کروایا۔ یہ پیچیدہ حساب کتاب کو آسان بنانے کا ایک طریقہ ہے خاص طور پر وہ جو بڑے اعداد کی ضرب اور تقسیم پر مشتمل ہوں۔ آج کل لوگارتھم ریاضی میں بنیادی حیثیت کے طور پر سائنس، مالیات (فنانس) اور ٹیکنالوجی میں استعمال ہوتا ہے۔

2.2.1 حقیقی عدد کا لوگارتھم (Logarithm of a Real Number)

سادہ الفاظ میں ایک حقیقی عدد کا لوگارتھم ہمیں بتاتا ہے کہ دوسرا عدد حاصل کرنے کے لیے ایک عدد کو خود سے کتنی بار ضرب کرنا ہوگا۔

لوگارتھم کی عام شکل یہ ہوتی ہے:

$$\log_b(x) = y$$

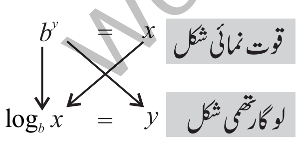
جب کہ:

- b اساس ہے،
- x وہ نتیجہ یا عدد ہے جس کا لوگارتھم لیا جارہا ہے،
- y قوت نما ہے یا x کا لوگارتھم b اساس کے ساتھ

اس کا مطلب یہ ہے کہ:

$$b^y = x$$

دوسرے الفاظ میں جب b کا قوت نما y ہو تو یہ x کے برابر ہوتا ہے۔ لوگارتھمی شکل اور اس کے مساوی قوت نمائی شکل کے درمیان تعلق نیچے دیا گیا ہے:



$$\log_b(x) = y \iff b^y = x$$ جبکہ $b > 0, x > 0$ اور $b \neq 1$

مثال 5: $\log_2 8 = 3$ کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کیجیے۔

حل: $\log_2 8 = 3$

اس کی قوت نمائی شکل: $2^3 = 8$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 6: $\log_{10}100 = 2$ کو قوت نمائی شکل میں کیجیے۔

حل: $\log_{10}100 = 2$

اس کی قوت نمائی شکل: $10^2 = 100$

مثال 7: x کی قیمت معلوم کریں:

(i) $\log_5 25 = x$ (ii) $\log_2 x = 6$

حل: (i) $\log_5 25 = x$

اس کی قوت نمائی شکل:

$5^x = 25$

$\Rightarrow 5^x = 5^2$

$x = 2$

(ii) $\log_2 x = 6$

اس کی قوت نمائی شکل:

$2^6 = x$

$x = 64$

مثال 8: درج ذیل کو لوگارتھمی شکل میں لکھیے:

(i) $3^4 = 81$ (ii) $7^0 = 1$

حل: (i) $3^4 = 81$

اس کی لوگارتھمی شکل: $\log_3 81 = 4$

(ii) $7^0 = 1$

اس کی لوگارتھمی شکل: $\log_7 1 = 0$

مشق 2.2

1۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کو لوگارتھمی شکل میں لکھیے:

(i) $10^3 = 1000$ (ii) $2^8 = 256$ (iii) $3^{-3} = \frac{1}{27}$

(iv) $20^2 = 400$ (v) $16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ (vi) $11^2 = 121$

(vii) $p = q^r$ (viii) $(32)^{\frac{-1}{5}} = \frac{1}{2}$

2۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کو قوت نمائی شکل میں لکھیے:

(i) $\log_5 125 = 3$ (ii) $\log_2 16 = 4$ (iii) $\log_{23} 1 = 0$

(iv) $\log_5 5 = 1$ (v) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ (vi) $\frac{1}{2} = \log_9 3$

(vii) $5 = \log_{10} 100000$ (viii) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTBtextbook

3۔ درج ذیل ہر ایک میں x کی قیمت معلوم کریں:

(i) $\log_x 64 = 3$ (ii) $\log_5 1 = x$ (iii) $\log_x 8 = 1$

(iv) $\log_{10} x = -3$ (v) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ (vi) $\log_2 1024 = x$

2.3 عام لوگارتھم (Common Logarithm)

عام لوگارتھم ایسے لوگارتھم ہوتے ہیں جن کی اساس 10 ہوتی ہے۔ ان کو $\log_{10}$ یا log کے طور پر لکھا جاتا ہے (جب لوگارتھم کی اساس نہ لکھی ہو تو اسے عام طور پر اساس 10 ہی سمجھا جاتا ہے)۔

مثال کے طور پر:

$$10^1 = 10 \Leftrightarrow \log 10 = 1$$
$$10^2 = 100 \Leftrightarrow \log 100 = 2$$
$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log 1000 = 3$$
$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1 \Leftrightarrow \log 0.1 = -1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01 \Leftrightarrow \log 0.01 = -2$$
$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001 \Leftrightarrow \log 0.001 = -3$$

تاریخ

انگریزی ریاضی دان ہنری برگز (Henry Briggs) نے نیپیئر (Napier) کے کام کو آگے بڑھایا اور عام لوگارتھم تیار کیا۔ اس نے لوگارتھم جدول بھی متعارف کروایا۔

2.3.1 لوگارتھم کا خاصہ اور مینٹیسا (Characteristic and Mantissa of Logarithm)

ایک عدد کا لوگارتھم دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے: **خاصہ** اور **مینٹیسا**۔ ان کو سمجھنے کا آسان طریقہ یہ ہے:

(a) خاصہ (Characteristic)

خاصہ لوگارتھم کا صحیح عددی حصہ ہوتا ہے۔ یہ ہمیں بتاتا ہے کہ عدد کتنا بڑا یا چھوٹا ہے۔

خاصہ معلوم کرنے کا طریقہ

(i) 1 سے بڑے عدد کے لیے:

1- نقطہ اعشاریہ کے بائیں طرف ہندسوں کی تعداد = خاصہ

مثال کے طور پر $\log 567 = 3 - 1 = 2$ کا خاصہ

(ii) 1 سے چھوٹے عدد کے لیے:

(1+ نقطہ اعشاریہ اور پہلے غیر صفر ہندسے کے درمیان صفر کی تعداد) −= خاصہ

مثال کے طور پر $\log 0.0123 = -(1+1) = -2$ یا $\bar{2}$ کا خاصہ

یاد رکھیے!

جب خاصہ منفی ہو تو ہم اسے بار کے ساتھ لکھتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 9: درج ذیل کا خاصہ معلوم کیجیے:

(i) log 725 (ii) log 9.87 (iii) log 0.00045 (iv) log 0.54

حل:

(i) log 725

خاصہ $= 3 - 1 = 2$

(ii) log 9.87

خاصہ $= 1 - 1 = 0$

(iii) log 0.00045

خاصہ $= -(3 + 1) = \bar{4}$

(iv) log 0.54

خاصہ $= -(0 + 1) = \bar{1}$

اعداد کے لوگارتھم کا خاصہ انھیں سائنسی ترقیم میں تبدیل کر کے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر:

لوگارتھم کا خاصہ	سائنسی ترقیم	عدد
2	7.25×10^2	725
0	9.87×10^0	9.87
-4	4.5×10^{-4}	0.00045
-1	5.4×10^{-1}	0.54

(b) مینٹیسا (Mantissa)

مینٹیسا لوگارتھم کا کسری حصہ ہوتا ہے اور یہ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر $\log 5000 = 3.698$ میں مینٹیسا 0.698 ہے۔

2.3.2 عدد کا عام لوگارتھم معلوم کرنا (Finding Common Logarithm of a Number)

فرض کریں کہ ہم 13.45 کا عام لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ لوگارتھم کو معلوم کرنے کا مرحلہ وار طریقہ ذیل میں دیا گیا ہے:

مرحلہ 1: صحیح عددی اور کسری حصوں کو الگ کیجیے۔

صحیح عددی حصہ = 13

کسری حصہ = 45

> **یاد رکھیے!**
> log (عدد) = خاصہ + مینٹیسا

مرحلہ 2: عدد کا خاصہ معلوم کیجیے۔

خاصہ = نقطہ اعشاریہ کے بائیں طرف ہندسوں کی تعداد 1–

$= 2 - 1 = 1$

مرحلہ 3: عام لوگارتھم جدول (مکمل جدول کتاب کے آخر میں دیا گیا ہے) میں، قطار نمبر 13 اور کالم نمبر 4 کے تقاطع میں دیکھیں جو 1271 ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مرحلہ 4: اوسط فرق (Mean difference) تلاش کیجیے: قطار نمبر 13 اور کالم نمبر 5 کے تقاطع کو لوگارتھم جدول کے اوسط فرق میں دیکھیں جو کہ 16 ہے۔

لوگارتھم جدول

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	اوسط فرق								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27

مرحلہ 5: مرحلہ 3 اور مرحلہ 4 میں حاصل ہونے والے اعداد کو جمع کریں۔ یعنی $16 + 1271 = 1287$ پس 0.1287 دیے گئے عدد کا مینٹیسا ہے۔

مرحلہ 6: آخر میں، بالترتیب مرحلہ 2 اور مرحلہ 5 میں حاصل ہونے والے خاصہ اور مینٹیسا کو یکجا کیجیے جو کہ 1.1287 ہے۔

لہٰذا $\log 13.45 = 1.1287$

مثال 10: درج ذیل اعداد کا لوگارتھم معلوم کیجیے۔

(i) $\log 345$ (ii) $\log 5.678$ (iii) $\log 0.0036$ (iv) $\log 0.0478$

حل: (i) $\log 345$

خاصہ $= 3 - 1 = 2$

مینٹیسا $= 0.5378$ (لوگارتھم جدول کی قطار نمبر 34 اور کالم نمبر 5 کے تقاطع میں دیکھیے)

لہٰذا $\log(345) = 2 + 0.5378 = 2.5378$

(ii) $\log 5.678$

خاصہ $= 1 - 1 = 0$

مینٹیسا $= 0.7542$ $(7536 + 6 = 7542)$

لہٰذا $\log(5.678) = 0 + 0.7542 = 0.7542$

(iii) $\log 0.0036$

خاصہ $= -(2 + 1) = -3$

مینٹیسا $= 0.5563$ (لوگارتھم جدول کی قطار نمبر 36 اور کالم نمبر 0 کے تقاطع میں دیکھیے)

لہٰذا $\log(0.0036) = -3 + 0.5563 = -2.443$

(iv) $\log 0.0478$

خاصہ $= -(1 + 1) = -2$

مینٹیسا $= 0.6794$ (لوگارتھم جدول کی قطار نمبر 47 اور کالم نمبر 8 کے تقاطع میں دیکھیے)

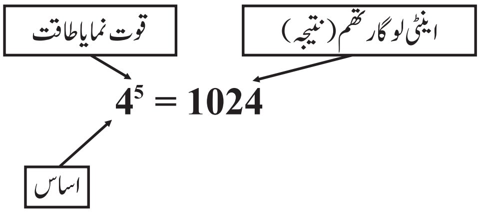
لہٰذا $\log(0.0478) = -2 + 0.6794 = -1.3206$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

2.3.3 اینٹی لوگارتھم کا تصور (Concept of Antilogarithm)

اینٹی لوگارتھم ایک لوگارتھم کا اُلٹ آپریشن ہوتا ہے۔ اینٹی لوگارتھم اس عدد کو تلاش کرنے میں مدد کرتا ہے جس کی لوگارتھمی قیمت دی گئی ہو۔



آسان الفاظ میں:

اگر $\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$ ہو تو x معلوم کرنے کے عمل کو y کا اینٹی لوگارتھم کہا جاتا ہے۔

جدول کا استعمال کرتے ہوئے کسی عدد کا اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا

> **یاد رکھیے!**
> اینٹی لوگارتھم عدد یا نتیجہ کے لیے ایک دوسرا لفظ ہے۔ مثال کے طور پر $4^3 = 64$ میں نتیجہ 64 اینٹی لوگارتھم ہے۔

آیئے ہم 2.1245 کا اینٹی لوگارتھم معلوم کرتے ہیں۔

اینٹی لوگارتھم کو معلوم کرنے کے لیے مرحلہ وار طریقہ ذیل میں دیا گیا ہے:

مرحلہ 1: خاصہ اور مینٹیسا کو الگ کیجیے:

خاصہ = 2　;　مینٹیسا = 0.1245

مرحلہ 2: اینٹی لوگارتھم جدول (کتاب کے آخر میں دیا گیا ہے) سے مینٹیسا کی متعلقہ قدر معلوم کیجیے:

قطار نمبر 12. اور کالم نمبر 4 کے تقاطع کو دیکھیں جو کہ 1330 ہے۔

مرحلہ 3: اوسط فرق معلوم کیجیے:

قطار نمبر 12. اور کالم نمبر 5 کے تقاطع کو اینٹی لوگارتھم جدول میں اوسط فرق میں دیکھیں جو کہ 2 ہے۔

اینٹی لوگارتھم جدول

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	اوسط فرق								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3

مرحلہ 4: مرحلہ 2 اور مرحلہ 3 میں حاصل ہونے والے اعداد کو جمع کریں یعنی $1330 + 2 = 1332$

مرحلہ 5: نقطہ اعشاریہ لگایئے:

چوں کہ خاصہ 2 ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ حوالہ کے مقام سے دائیں طرف 2 ہندسوں کے بعد ہوگا۔ یعنی $1_\wedge 33.2$

اس طرح　اینٹی لوگارتھم $(2.1245) = 133.2$

> **یاد رکھیے!**
> بائیں طرف سے پہلے غیر صفر ہندسے اور اس کے اگلے ہندسے کے درمیان کی جگہ کو حوالہ کا مقام کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر 1332 میں حوالہ کا مقام 1 اور 3 کے درمیان ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 11: درج ذیل میں x کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log x = 0.2568$ (ii) $\log x = -1.4567$ (iii) $\log x = -2.1234$

حل: (i) $\log x = 0.2568$

خاصہ $= 0$ ؛ مینٹیسا $= 0.2568$

0.2568 کی جدول میں قدر $= 1803 + 3 = 1806$

لہٰذا $x =$ اینٹی لوگارتھم $(0.2568) = 1.806$ (حوالہ کے مقام پر نقطہ اعشاریہ لگائیں کیونکہ خاصہ 0 ہے۔)

(ii) $\log x = -1.4567$

چوں کہ مینٹیسا منفی ہے اس لیے ہم 2 کو جمع اور تفریق کرتے ہیں۔

$$\log x = -2 + 2 - 1.4567$$
$$= -2 + 0.5433 = \bar{2}.5433$$

یہاں خاصہ $= \bar{2}$ اور مینٹیسا $= 0.5433$

0.5433 کی جدول میں قدر $= 3491 + 2 = 3_{\wedge}493$

$x =$ اینٹی لوگارتھم $(\bar{2}.5433)$

$= 0.03493$

چوں کہ خاصہ $\bar{2}$ ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ حوالہ کے مقام سے بائیں طرف 2 ہندسوں سے پہلے ہو گا۔

(iii) $\log x = -2.1234$

چوں کہ مینٹیسا منفی ہے اس لیے ہم 3 کو جمع اور تفریق کرتے ہیں۔

$$\log x = -3 + 3 - 2.1234$$
$$= -3 + 0.8766 = \bar{3}.8766$$

یہاں خاصہ $= \bar{3}$ اور مینٹیسا $= 0.8766$

0.8766 کی جدول میں قدر $= 7516 + 10 = 7_{\wedge}526$

$x =$ اینٹی لوگارتھم $(\bar{3}.8766)$

$= 0.007526$

چوں کہ خاصہ $\bar{3}$ ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ حوالہ کے مقام سے بائیں طرف 3 ہندسوں سے پہلے ہو گا۔

> **تاریخ**
> سوئس ریاضی دان اور طبیعیات دان لیون ہارڈ آیلر (Leonhard Eular) نے قدرتی لوگارتھم کی اساس کے لیے 'e' متعارف کرایا۔

2.3.4 قدرتی لوگارتھم (Natural Logarithm)

اساس e والے لوگارتھم کو قدرتی لوگارتھم کہا جاتا ہے جبکہ e ایک ریاضیاتی مستقل مقدار ہے جو قریباً 2.71828 ہوتی ہے۔ اس کو ln سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قدرتی لوگارتھم ریاضی خاص طور پر کیلکولس، بڑھنے / گھٹنے والے تفاعل اور قدرتی مظاہر کی وضاحت کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر $\ln e^2 = 2$ یعنی کہ اساس e پر e^2 کا لوگارتھم 2 ہوتا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

عام اور قدرتی لوگارتھم کے درمیان فرق

عام لوگارتھم	قدرتی لوگارتھم
1۔ عام لوگارتھم کی اساس 10 ہوتی ہے۔	1۔ قدرتی لوگارتھم کی اساس e ہوتی ہے۔
2۔ اس کو $\log_{10}(x)$ یا صرف $\log(x)$ لکھا جاتا ہے۔	2۔ اس کو $\ln(x)$ لکھا جاتا ہے۔
3۔ عام لوگارتھم کا روز مرہ زندگی کے حساب کتاب میں بڑے پیمانے پر خاص طور پر سائنس اور انجینئرنگ میں اطلاق ہوتا ہے۔	3۔ قدرتی لوگارتھم کا عام طور پر اعلیٰ درجے کی ریاضی، کیلکولس اور بڑھنے / گھٹنے کے عوامل پر اطلاق ہوتا ہے۔

مشق 2.3

1۔ درج ذیل میں دیے گئے اعداد کا خاصہ لکھیے:

(i) 5287 (ii) 59.28 (iii) 0.0567
(iv) 234.7 (v) 0.000049 (vi) 145000

2۔ درج ذیل میں دیے گئے اعداد کا لوگارتھم معلوم کیجیے:

(i) 43 (ii) 579 (iii) 1.982
(iv) 0.0876 (v) 0.047 (vi) 0.000354

3۔ اگر $\log 3.177 = 0.5019$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے:

(i) $\log 3177$ (ii) $\log 31.77$ (iii) $\log 0.03177$

4۔ x کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\log x = 0.0065$ (ii) $\log x = 1.192$ (iii) $\log x = -3.434$
(iv) $\log x = -1.5726$ (v) $\log x = 4.3561$ (vi) $\log x = -2.0184$

2.4 لوگارتھم کے قوانین (Laws of Logarithm)

لوگارتھم کے قوانین کو لوگارتھم کے قواعد یا خصوصیات کے طور پر بھی جانا جاتا ہے۔ یہ قوانین لوگارتھمی جملوں کو آسان بنانے اور لوگارتھمی مساواتوں کو حل کرنے میں مدد کرتے ہیں۔

1۔ **ضرب کا قانون (Product Law)**

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

دو اعداد کے حاصل ضرب کا لوگارتھم دونوں اعداد کے انفرادی لوگارتھم کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ثبوت: فرض کیا $m=\log_b x \quad \ldots$ (i)

اور $n=\log_b y \quad \ldots$ (ii)

(i)اور(ii) کو قوت نمائی شکل میں لکھنے سے:

$$x=b^m \quad \text{اور} \quad y=b^n$$

x اور y کو ضرب دینے سے

$$x.y=b^m.\ b^n=b^{m+n}$$

لوگارتھمی شکل میں لکھنے سے

$$\log_b xy=m+n$$

$$\log_b xy=\log_b x+\log_b y$$ [(i) اور (ii) سے]

2۔ تقسیم کا قانون (Quotient Law)

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right)=\log_b x-\log_b y$$

دو اعداد کی کسر کا لوگارتھم شمار کنندہ کے لوگارتھم اور مخرج کے لوگارتھم کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیا $m=\log_b x \quad \ldots$ (i)

اور $n=\log_b y \quad \ldots$ (ii)

(i)اور(ii) کو قوت نمائی شکل میں لکھنے سے:

$$x=b^m \quad \text{اور} \quad y=b^n$$

x کو y پر تقسیم کرنے سے:

$$\frac{x}{y}=\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}$$

لوگارتھمی شکل میں لکھنے سے:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right)=m-n$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right)=\log_b x-\log_b y$$

سرگرمی

- طلبہ کو چھوٹے گروہوں میں تقسیم کریں۔
- گروہوں کے درمیان لوگارتھمی جملوں کے کارڈز کو بے ترتیب کر کے تقسیم کریں۔
- ہر گروہ اس بات کی نشان دہی کرے گا کہ کس جملے پر لوگارتھم کا کون سا قانون لاگو ہو گا۔
- کام مکمل کرنے کے بعد ہر گروہ اپنے نتائج پیش کرے گا۔

3۔ قوت نما کا قانون (Power Law)

$$\log_b x^n=n.\log_b x$$

کسی عدد کے قوت نما کا لوگارتھم قوت نما اور عدد کے لوگارتھم کی حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ثبوت: فرض کیا $m = \log_b x \quad \ldots \text{(i)}$

قوت نمائی شکل میں لکھنے سے:

$$x = b^m$$

دونوں اطراف کی قوت n لینے سے:

$$x^n = (b^m)^n = b^{nm}$$

لوگارتھمی شکل میں لکھنے سے:

$$\log_b x^n = nm$$

$$\log_b x^n = n.\log_b x$$ [مساوات (i) سے]

4۔ اساس کی تبدیلی کا قانون (Change of Base Law)

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

یہ قانون لوگارتھم کی اساس کو "b" سے کسی دوسری اساس "a" میں تبدیل کرنے کی اجازت دیتا ہے۔

ثبوت:

فرض کیا $m = \log_b x \quad \ldots \text{(i)}$

قوت نمائی شکل میں لکھنے سے

$$b^m = x$$

طرفین کا $\log_a$ لینے سے:

$$\log_a b^m = \log_a x$$

$$m \log_a b = \log_a x$$

$$m = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$ [مساوات (i) سے]

2.4.1 لوگارتھم کا اطلاق (Applications of Logarithm)

لوگارتھم کا بہت سے شعبوں میں وسیع طور پر اطلاق ہوتا ہے۔ یہاں لوگارتھم کے اطلاق کے بارے میں کچھ مثالیں دی گئی ہیں۔

مثال 12: درج ذیل کو لوگارتھم کے قوانین کی مدد سے پھیلا کر لکھیں۔

(i) $\log_3(20)$ (ii) $\log_2(9)^5$ (iii) $\log_{32} 27$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

حل:

(i) $\log_3(20)$

$= \log_3(2\times 2\times 5)$

$= \log_3(2^2\times 5)$

$= \log_3(2)^2 + \log_3 5$

$= 2\log_3 2 + \log_3 5$

(ii) $\log_2 (9)^5$

$= \log_2 (3^2)^5$

$= \log_2 (3)^{10}$

$= 10\log_2 3$

(iii) $\log_{32} 27$

$= \dfrac{\log 27}{\log 32}$

$= \dfrac{\log 3^3}{\log 2^5}$

$= \dfrac{3\log 3}{5\log 2}$

$= \dfrac{3}{5}\log_2 3$

مثال13: درج ذیل کو لوگارتھم کے قوانین کی مدد سے پھیلا کر لکھیے:

(i) $\log_2\left(\frac{x\ y}{z}\right)^3$ (ii) $\log_5\left(\frac{xy}{z}\right)^8$

حل:

(i) $\log_2\left(\frac{x-y}{z}\right)^3 = 3\log_2\left(\frac{x-y}{z}\right)$

$= 3\left[\log_2(x-y) - \log_2 z\right]$

(ii) $\log_5\left(\frac{xy}{z}\right)^8 = 8\log_5\left(\frac{xy}{z}\right)$

$= 8\left[\log_5(xy) - \log_5 z\right]$

$= 8\left[\log_5 x + \log_5 y - \log_5 z\right]$

مثال14: درج ذیل کو واحد لوگارتھم کی شکل میں لکھیں:

(i) $2\log_3 10 - \log_3 4$ (ii) $6\log_3 x + 2\log_3 11$

حل:

(i) $2\log_3 10 - \log_3 4$

$= \log_3(10)^2 - \log_3 4$

$= \log_3 100 - \log_3 4$

$= \log_3\left(\frac{100}{4}\right)$

$= \log_3 25$

(ii) $6\log_3 x + 2\log_3 11$

$= \log_3 x^6 + \log_3(11)^2$

$= \log_3 x^6 + \log_3(121)$

$= \log_3(121x^6)$

مثال15: ڈیسیبل (Decibel) اسکیل کا کلیہ $L = 40\log_{10}\left(\frac{I}{I_o}\right)$ آواز کی شدت کی پیمائش کرتا ہے۔ اگر کسی آواز کی شدت (I) حوالہ کی شدت (I_o) کا 10^6 گنا ہو تو ڈیسیبل میں آواز کی سطح کیا ہو گی؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

کیا آپ جانتے ہیں؟

$ln\,(0) =$ غیر واضح
$ln\,(1) = 0$
$ln\,(e) = 1$

حل:

$$L = 40\log_{10}\left(\frac{I}{I_o}\right)$$

$I = 10^6 I_o$ درج کرنے سے

$$L = 40\log_{10}\left(\frac{10^6 I_o}{I_o}\right)$$

$$L = 40\log_{10}(10)^6$$

$$L = 40 \times 6\log_{10}10$$

$$L = 40 \times 6 \qquad (\because \log_{10}10 = 1)$$

$L = 240$ ڈیسیبلز

مشق 2.4

1۔ کیلکولیٹر کا استعمال کیے بغیر درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log_2 18 - \log_2 9$ (ii) $\log_2 64 + \log_2 2$ (iii) $\frac{1}{3}\log_3 8 - \log_3 18$

(iv) $2\log 2 + \log 25$ (v) $\frac{1}{3}\log_4 64 + 2\log_5 25$ (vi) $\log_3 12 + \log_3 0.25$

2۔ درج ذیل کو واحد لوگارتھم کی شکل میں ظاہر کیجیے:

(i) $\frac{1}{2}\log 25 + 2\log 3$ (ii) $\log 9 - \log\frac{1}{3}$

(iii) $\log_5 b^2 . \log_a 5^3$ (iv) $2\log_3 x + \log_3 y$

(v) $4\log_5 x - \log_5 y + \log_5 z$ (vi) $2\ln a + 3\ln b - 4\ln c$

3۔ درج ذیل لوگارتھموں کو پھیلا کر لکھیے:

(i) $\log\left(\frac{11}{5}\right)$ (ii) $\log_5\sqrt{8a^6}$ (iii) $\ln\left(\frac{a^2b}{c}\right)$

(iv) $\log\left(\frac{xy}{z}\right)^{\frac{1}{9}}$ (v) $\ln\sqrt[3]{16x^3}$ (vi) $\log_2\left(\frac{1-a}{b}\right)^5$

4۔ درج ذیل مساواتوں میں x کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log 2 + \log x = 1$ (ii) $\log_2 x + \log_2 8 = 5$

(iii) $(81)^x = (243)^{x+2}$ (iv) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-6} = 27$

(v) $\log(5x - 10) = 2$ (vi) $\log_2(x+1) - \log_2(x-4) = 2$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

5۔ لوگارتھم جدول کی مدد سے درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{3.68 \times 4.21}{5.234}$ (ii) $4.67 \times 2.11 \times 2.397$

(iii) $\frac{(20.46)^2 \times (2.4122)}{754.3}$ (iv) $\frac{\sqrt[3]{9.364} \times 21.64}{3.21}$

6۔ زلزلوں کی شدت کی پیمائش کا کلیہ $M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_o}\right)$ ہے۔ اگر 10,000 طول موج (A) اور 10 طول موج کا حوالہ (A_o) ہو تو زلزلے کی شدت کتنی ہو گی؟

7۔ عبداللہ نے ایک بچت اسکیم میں 100,000 روپے کی سرمایہ کاری کی اور سالانہ 5% کی شرح سے منافع حاصل کیا تاکہ اس سرمایہ کاری کی کل مالیت t سالوں کے بعد y روپے ہو جائے۔ اسے ایک مساوات $y = 100,000\,(1.05)^t,\ t \geq 0$ کی شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔ معلوم کریں کہ کتنے سالوں کے بعد سرمایہ کاری دوگنی ہو جائے گی۔

8۔ حوریہ ایک ایسے پہاڑ پر چڑھ رہی ہے جہاں درجہ حرارت (T) ہر 100 m اونچائی بڑھنے پر 3% (یا 0.97 کا جزو) کم ہو جاتا ہے۔ ابتدائی درجہ حرارت (T_i) سطح سمندر پر $20\ °C$ ہے۔ کلیہ $T = T_i \times 0.97^{\frac{h}{100}}$ کو استعمال کرتے ہوئے 500 m کی اونچائی (h) پر درجہ حرارت معلوم کریں۔

جائزہ مشق 2

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) 5.2×10^6 کی معیاری شکل ہے:

(a) 52,000 (b) 520,000 (c) 5,200,000 (d) 52,000,000

(ii) 0.00034 کی سائنسی ترقیم ہے:

(a) 3.4×10^3 (b) 3.4×10^{-4} (c) 3.4×10^4 (d) 3.4×10^{-3}

(iii) عام لوگارتھم کی اساس ہوتی ہے:

(a) 2 (b) 10 (c) 5 (d) e

(iv) $\log_2 2^3 =$ __________

(a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 3

(v) $\log 100 =$ __________

(a) 2 (b) 3 (c) 10 (d) 1

(vi) اگر $\log 2 = 0.3010$ ہو تو $\log 200$ ہے:

(a) 1.3010 (b) 0.6010 (c) 2.3010 (d) 2.6010

(vii) $\log (0) =$ __________

(a) مثبت (b) منفی (c) صفر (d) غیر واضح

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(viii) log 10,000 = _________

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

(ix) log 5 + log 3 = __________

(a) log 0 (b) log 2 (c) $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (d) log 15

(x) $3^4 = 81$ کی لوگارتھمی شکل ہے:

(a) $\log_3 4 = 81$ (b) $\log_4 3 = 81$

(c) $\log_3 81 = 4$ (d) $\log_4 81 = 3$

2۔ درج ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیے:

(i) 0.000567 (ii) 734 (iii) 0.33×10^3

3۔ درج ذیل اعداد کو عام ترقیم میں لکھیے:

(i) 2.6×10^3 (ii) 8.794×10^{-4} (iii) 6×10^{-6}

4۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کو لوگارتھمی شکل میں لکھیے:

(i) $3^7 = 2187$ (ii) $a^b = c$ (iii) $(12)^2 = 144$

5۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کو قوت نمائی شکل میں لکھیے:

(i) $\log_4 8 = x$ (ii) $\log_9 729 = 3$ (iii) $\log_4 1024 = 5$

6۔ درج ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں:

(i) $\log_9 x = 0.5$ (ii) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x} = 27$ (iii) $\left(\frac{1}{32}\right)^{2x} = 64$

7۔ درج ذیل کو واحد لوگارتھم کی شکل میں لکھیے:

(i) $7\log x - 3\log y^2$ (ii) $3\log 4 - \log 32$

(iii) $\frac{1}{3}(\log_5 8 + \log_5 27) - \log_5 3$

8۔ درج ذیل کو لوگارتھم کے قوانین کی مدد سے پھیلا کر لکھیے:

(i) $\log(x\,y\,z^6)$ (ii) $\log_3 \sqrt[6]{m^5 n^3}$ (iii) $\log\sqrt{8x^3}$

9۔ درج ذیل کی قیمتیں لوگارتھم جدول کی مدد سے معلوم کیجیے:

(i) $\sqrt[3]{68.24}$ (ii) 319.8×3.543 (iii) $\frac{36.12 \times 750.9}{113.2 \times 9.98}$

10۔ سال 2016 میں ایک شہر کی آبادی 22 ملین تھی اور ہر سال % 2.5 کی شرح سے بڑھ رہی تھی۔ تفاعل $p(t) = 22(1.025)^t$ ملین میں 2016 کے بعد t سالوں میں آبادی معلوم کرتا ہے۔ دیے گئے تفاعل کا استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ کتنے سالوں میں آبادی 35 ملین تک پہنچ جائے گی۔

Web version of PCTBtextbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ 3

سیٹ اور تفاعل
(Sets and Functions)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- سابقہ واقفیت
  - ریاضی کو نمونوں، ساخت اور تعلق کے مطالعہ کے طور پر بیان کر سکیں۔
  - وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے سیٹوں کی شناخت کریں اور تین سیٹوں (تحتی سیٹ، متر اکب سیٹ اور غیر مشترک سیٹ) پر قوانین کا اطلاق کر سکیں۔
- دو یا تین سیٹوں کو وین اشکال میں استعمال کرتے ہوئے درجہ بندی اور فہرست بندی کے مسائل کو حل کر سکیں۔مزید سیٹوں کو حقیقی دنیا کے مسائل پر لاگو کر سکیں۔
- تجزیاتی اور وین اشکال کے طریقوں کے ذریعے تین سیٹوں کے یونین اور تقاطع کی خصوصیات / قوانین کی تصدیق اور اطلاق کر سکیں۔
- سیٹ تھیوری کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل پر لاگو کر سکیں (جیسے آبادیاتی درجہ بندی میں اور شاپنگ مالز میں مصنوعات کی درجہ بندی میں)۔
- کارتیسی حاصل ضرب ، ثنائی ربط اور اس کے ڈومین اور رینج کی وضاحت کر سکیں۔
- سمجھیں کہ کسی ربط کو جدول، مرتب جوڑے اور گراف کے ذریعے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔
- علامات کو پہچانیں اور تفاعل کی قیمت اور اس کے ڈومین اور رینج کا تعین کر سکیں۔
- وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی اقسام (اِن ٹو، آن ٹو، وَن۔ٹو۔وَن، ان جیکٹو، سرجیکٹو اور بائی جیکٹو) کی شناخت کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

اس یونٹ میں، ہم سیٹ تھیوری اور تفاعل کے کچھ بنیادی تصورات کا اعادہ کریں گے، ریاضی کو بطور ایک لازمی مطالعہ سمجھتے ہوئے، جو نمونوں، ساخت اور ربط کا تجزیہ کرتی ہے۔ طلبہ مختلف اقسام کے سیٹوں کی پہچان، دو اور تین سیٹوں کے یونین اور تقاطع کے قوانین اور ان کو وین اشکال سے ظاہر کرنا سیکھیں گے۔ مزید برآں وہ سیٹ تھیوری کو حقیقی دنیا کے مسائل میں لاگو کریں گے تا کہ آبادیاتی درجہ بندی اور مصنوعات کی درجہ بندی کے تصور کو بہتر سمجھ سکیں۔ درجہ بندی مختلف سیٹوں کے مابین ربط کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے۔ طلبہ ثنائی ربط اور تفاعل کو بھی دریافت کریں گے اور ان کو مختلف طریقوں بشمول جدول، مترتب جوڑے اور گراف سے ظاہر کرنا سیکھیں گے۔

3.1 ریاضی نمونوں، ساختوں اور روابط کے طور پر
(Mathematics as the Study of Patterns, Structures and Relationships)

ریاضی نمونوں، ساختوں اور روابط کی سائنس ہے، بشمول مختلف شاخوں کے جو ہماری دنیا کے منطقی اور مقداری پہلوؤں کی کھوج اور

Web version of PCTB textbook

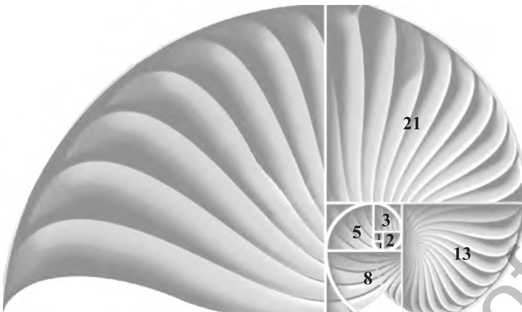
NOT FOR SALE-PESRP

تجزیہ کرتی ہیں۔ ریاضی کی طاقت ان روابط پر مبنی ہے جو نمونوں اور ساخت کے درمیان تفہیم کو بہتر بناتے ہیں اور ان کی عمومی شکلیں فراہم کرتے ہیں۔

ایک ریاضیاتی نمونہ اعداد، اشکال یا علامتوں کا ایک متوقع نظام ہے جو ایک مخصوص اصول یا ربط کی پیروی کرتا ہے۔ عملی طور پر نمونے ساختی علم سیکھنے کی کنجی ہیں جو عددی اور جیومیٹری کے روابط پر مشتمل ہیں۔ مثال کے طور پر اعداد کے درج ذیل عددی نمونے کو دیکھیں۔

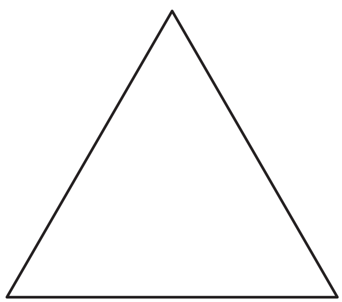
پانچویں رقم	چوتھی رقم	تیسری رقم	دوسری رقم	پہلی رقم
13	10	7	4	1

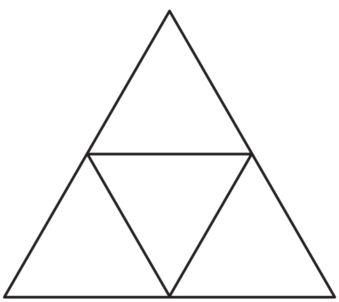
$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+3} 10 \xrightarrow{+3} 13$$

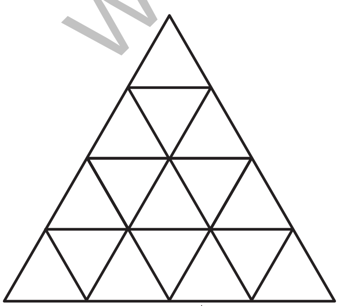


اوپر دیے گئے نمونے میں ہر رقم پچھلی رقم میں 3 کا اضافہ کر کے حاصل کی جاتی ہے۔ یہ پیشن گوئی کی قابل قاعدہ یا نمونہ مسلسل جاری رہتا ہے، جس سے یہ ایک سلسلہ بنتا ہے جہاں ہر رقم مستقل شرح سے بڑھتی ہے۔ ایک اور مشہور سلسلے کی مثال پر غور کریں:

... ,0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 جسے فیبوناکی (Fibonacci) سلسلہ کہا جاتا ہے۔ یہ سلسلہ دو ابتدائی رقموں، 0 اور 1 سے شروع ہوتا ہے۔ اس سلسلے کی ہر رقم پچھلی دو رقموں کو جمع کر کے حاصل کی جاتی ہے۔ فیبوناکی سلسلے کا کلیہ یہ ہے $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ جہاں $F_0 = 0$ اور $F_1 = 1$ یہ بالترتیب پہلی اور دوسری رقمیں ہیں۔ یہ نمونہ فطرت میں بار بار نظر آتا ہے۔ ریاضی کی ساخت کا مطالعہ ریاضی کی مہارت کے لیے ضروری ہے۔ ریاضی کی ساخت عموماً عددی، جیومیٹری اور منطقی ربط کا ایک قاعدہ ہوتی ہے جو کسی خاص ڈومین میں مستقل رہتا ہے۔ ساخت اشیا یا عناصر کا ایک مجموعہ ہے، جس میں ان کے درمیان مخصوص روابط کو بیان کیا گیا ہے۔ ایک مثلث پر غور کریں جو چھوٹی مثلثوں پر مشتمل ہے جیسا کہ شکل (iii) میں دکھایا گیا ہے۔


شکل (i)

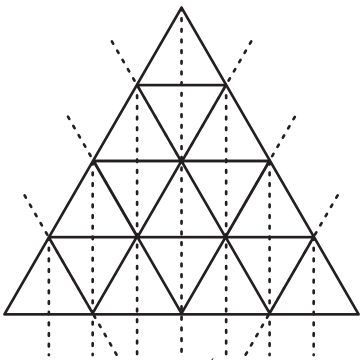

شکل (ii)


شکل (iii)

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

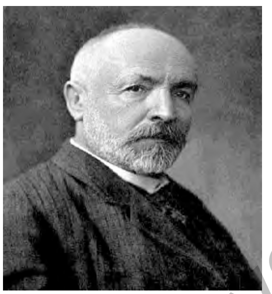
چھوٹی مثلثوں کو ترتیب دے کر ایک بڑی مثلث بنانے کا نمونہ واضح ہے۔ ہم آسانی سے پوشیدہ ساخت کو پہچان سکتے ہیں: بڑی مثلث کو کئی قطاروں پر مشتمل سمجھا جاسکتا ہے، جہاں ہر قطار میں چھوٹی مثلثوں کی تعداد کم ہوتی جاتی ہے (مثلاً، پہلی قطار میں 7 مثلثیں، دوسری میں 5 مثلثیں، تیسری میں 3 مثلثیں اور سب سے اوپر 1 مثلث)۔


شکل (iv)

قطاروں کی تکرار اور چھوٹی مثلث کے درمیان مکانی ربط اہم ساختی خصوصیات ہیں۔ چھوٹی مثلثوں کی سیدھ ہم آہنگی کا احساس پیدا کرتی ہے کیوں کہ ہر قطار ایک ہی سائز کی مثلثوں سے بنی ہوتی ہے۔ ایک ہی وقت میں یہ ترتیب متوازی اور عمودی روابط کو ظاہر کرتی ہے جب بڑی مثلث کی بنیاد کے حوالے سے دیکھا جائے جیسا کہ شکل (iv) میں دکھایا گیا ہے۔ ان نمونوں اور ساختوں کو سمجھنے سے ہم منطقی دلائل بنا سکتے ہیں۔

3.2 بنیادی تعریفیں (Basic Definitions)

جارج کینٹر ایک جرمن ریاضی دان تھا (1845-1918) جس نے سیٹ تھیوری کی ترقی میں نمایاں کردار ادا کیا، جو کہ ریاضی کا ایک اہم شعبہ ہے۔ اس نے دکھایا کہ کس طرح دو سیٹوں کا موازنہ ان کے اراکین کو ایک دوسرے سے ملا کر کیا جائے۔ کینٹر نے لامحدود سیٹوں کی مختلف اقسام کی وضاحت کی اور ثابت کیا کہ قدرتی اعداد سے زیادہ حقیقی اعداد ہیں۔ اس کے ثبوت سے معلوم ہوا کہ لامحدودیت کے کئی سائز ہیں۔ مزید برآں، اس نے اصلی اور توصیفی اعداد کے تصورات کو ان کے ریاضی کے عمل کے ساتھ متعارف کرایا۔



ہم سیٹ کے تصور سے واقف ہیں کیوں کہ یہ لفظ روزمرہ گفتگو میں اکثر استعمال ہوتا ہے، جیسے پانی کا سیٹ، چائے کا سیٹ اور صوفہ سیٹ۔ حیرت کی بات ہے کہ ریاضی دانوں نے اس عام لفظ کو ایک ریاضیاتی تصور میں اس حد تک ترقی دی ہے کہ یہ جدید ریاضی کی اکثر شاخوں میں استعمال ہونے والی زبان بن چکا ہے۔ سیٹوں کا مطالعہ روابط، تفاعل اور خاص طور پر شماریات میں احتمال اور دیگر اہم تصورات کو سمجھنے میں مدد کرتا ہے۔ سیٹ کو واضع اور مختلف اشیا، اعداد یا ارکان کا مجموعہ قرار دیا جاتا ہے، تاکہ ہم یہ فیصلہ کر سکیں کہ کوئی چیز اس مجموعے کا حصہ ہے یا نہیں۔

بڑے انگریزی حروف تہجی A, B, C, X, Y, Z وغیرہ، عام طور پر سیٹوں کے نام کے طور پر استعمال ہوتے ہیں اور چھوٹے انگریزی حروف تہجی a, b, c, x, y, z وغیرہ، سیٹوں کے ارکان یا عناصر کے طور پر استعمال ہوتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ایک سیٹ کو بیان کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں۔

(i) **بیانیہ طریقہ (Descriptive Method):** ایک سیٹ کو الفاظ میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، انگریزی حروف تہجی کے تمام حروفِ علت کا سیٹ۔

(ii) **اندراجی طریقہ (Tabular Method):** ایک سیٹ کو بریکٹ میں اس کے عناصر کی فہرست دے کر بیان کیا جا سکتا ہے۔
اگر A اوپر بیان کیا گیا سیٹ ہے، تو ہم اسے یوں لکھ سکتے ہیں: $A = \{a, e, i, o, u\}$

اندراجی طریقہ کو روسٹر طریقہ بھی کہا جاتا ہے۔

(iii) **ترقیم سیٹ ساز (Set-builder Method):** بعض اوقات سیٹ کو بیان کرنے کے لیے ترقیم سیٹ ساز کا استعمال زیادہ آسان یا مفید ہوتا ہے۔ اس میں کسی بھی سیٹ کے رکن کے لیے ایک علامت یا حرف استعمال کیا جاتا ہے اور تمام ارکان کی مشترکہ خصوصیت بیان کی جاتی ہے۔ دیے گئے سیٹ کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$A = \{x \mid$ انگریزی حروف تہجی کا ایک حرفِ علت ہے $x\}$

درج بالا سیٹ A کو ہم اس طرح پڑھتے ہیں: تمام x کا سیٹ جب کہ x ایک انگریزی حروف تہجی کا ایک حرف علت ہے۔

سیٹ کی رکنیت کے لیے "$\in$" یہ علامت استعمال ہوتی ہے۔ اس طرح $a \in A$ کا مطلب ہے a سیٹ A کا ایک رکن ہے یا a سیٹ A میں شامل ہے۔ جب کہ $c \notin A$ کا مطلب ہے کہ c سیٹ A میں شامل نہیں ہے یا c سیٹ A کا رکن نہیں ہے۔

سیٹ کے ارکان کچھ بھی ہو سکتے ہیں: لوگ، ممالک، دریا، یا ہماری سوچ کی اشیا۔ الجبرا میں ہم عموماً اعداد کے سیٹ کو استعمال کرتے ہیں۔ ان سیٹوں کے نام اور تفصیل درج ذیل ہیں:

قدرتی اعداد کا سیٹ $= N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

مکمل اعداد کا سیٹ $= W = \{0, 1, 2, \ldots\}$

صحیح اعداد کا سیٹ $= Z = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$

طاق اعداد کا سیٹ $= O = \{\pm1, \pm3, \pm5, \ldots\}$

جفت اعداد کا سیٹ $= E = \{0, \pm2, \pm4, \ldots\}$

مفرد اعداد کا سیٹ $= P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

ناطق اعداد کا سیٹ $= Q = \{x \mid x = \frac{p}{q}$ اور جب کہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0\}$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ $= Q' = \{x \mid x \neq \frac{p}{q}$ اور جب کہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0\}$

تمام حقیقی اعداد کا سیٹ $= R = Q \cup Q'$

ایسا سیٹ جس میں صرف ایک رکن ہو، یک رکنی سیٹ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $\{3\}$، $\{a\}$ اور {ہفتہ} یک رکنی سیٹ ہیں۔ وہ سیٹ جس میں کوئی رکن نہ ہو (یعنی ارکان کی تعداد صفر ہو) خالی سیٹ کہلاتا ہے۔ خالی سیٹ کو علامت $\emptyset$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یاد رکھیے!
سیٹ $\{0\}$ ایک یک رکنی سیٹ ہے جس میں صرف صفر بطور واحد رکن موجود ہے اور یہ خالی سیٹ نہیں ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مساوی سیٹ: دو سیٹ A اور B مساوی ہیں اگر ان میں بالکل ایک جیسے ارکان ہوں یا اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا رکن ہو۔ اگر دو سیٹ A اور B برابر ہیں تو ہم $A = B$ لکھتے ہیں۔ اس طرح، سیٹ $\{1، 2، 3\}$ اور $\{2، 1، 3\}$ مساوی سیٹ ہیں۔

مترادف سیٹ: دو سیٹ A اور B مترادف سیٹ کہلاتے ہیں اگر ان میں ارکان کی تعداد برابر ہو۔ مثال کے طور پر اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ہو تو A اور B مترادف سیٹ ہیں۔ مترادف سیٹ کو ظاہر کرنے کے لیے علامت ~ استعمال کی جاتی ہے۔ اس طرح ہم لکھ سکتے ہیں $A \sim B$ ۔

> **یاد رکھیے!**
> کسی بھی سیٹ کے تحتی سیٹ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے:
> $A \subseteq B$ اگر $\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$

تحتی سیٹ: اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو تو سیٹ A کو سیٹ B کا تحتی سیٹ کہتے ہیں۔ علامتی طور پر اسے $A \subseteq B$ لکھا جاتا ہے ۔ سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔

ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سیٹ B سیٹ A کا ایک سپر (فوقی) سیٹ ہے۔ اس کو علامتی طور پر ایسے لکھتے ہیں:

$B \supseteq A$ (سیٹ B سیٹ A کا سپر سیٹ ہے)۔

واجب تحتی سیٹ: اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو اور سیٹ B کا کم از کم ایک رکن ایسا ہے جو سیٹ A کا رکن نہ ہو تو سیٹ A کو سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ کہتے ہیں ۔ علامتی طور پر اسے $A \subset B$ لکھا جاتا ہے۔ سیٹ A سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ ہے۔

غیر واجب تحتی سیٹ: اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو اور $A = B$ پھر ہم کہہ سکتے ہیں کہ سیٹ A سیٹ B کا غیر واجب تحتی سیٹ ہے۔ اس تعریف سے ہم یہ بھی اخذ کر سکتے ہیں کہ ہر سیٹ اپنا ہی غیر واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $A = \{a, b, c\}$، $B = \{c, a, b\}$ اور $C = \{a, b, c, d\}$ ہو تو واضح طور پر $A \subset C$، $B \subset C$ لیکن $A = B$ غور کریں کہ A اور B سیٹوں میں سے ہر ایک دوسرے کا غیر واجب تحتی سیٹ ہے کیوں کہ $A = B$

> **یاد رکھیے!**
> جب ہم واجب تحتی سیٹ اور غیر واجب تحتی سیٹ میں فرق نہیں کرتے تو پھر ہم یہ علامت $\subseteq$ استعمال کرتے ہیں .یہ دیکھنا آسان ہے کہ:
> $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

یونیورسل سیٹ: ایسا سیٹ جس میں زیر غور تمام اشیا یا ارکان شامل ہوں اسے یونیورسل سیٹ یا کائناتی سیٹ کہا جاتا ہے۔ اسے U سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پاور سیٹ: سیٹ S کے پاور سیٹ کو $P(S)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ سیٹ S کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر:

(i) اگر $C = \{a, b, c, d\}$ ہو تو

$$P(C) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

(ii) اگر $D = \{a\}$ ہو تو $P(D) = \{\phi , \{a\}\}$

اگر S ایک متناہی سیٹ ہے جس میں $n(S) = m$ سیٹ S کے عناصر کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے، تو $n\{P(S)\} = 2^m$ پاور سیٹ کے ارکان کی تعداد ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

مشق 3.1

1۔ درج ذیل کو ترقیم سیٹ ساز میں لکھیے۔

(i) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, ..., 484\}$ (ii) $\{2, 4, 8, 16, ..., 256\}$

(iii) $\{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 1000\}$ (iv) $\{6, 12, 18, ..., 120\}$

(v) $\{100, 102, 104, ..., 400\}$ (vi) $\{1, 3, 9, 27, 81, ...\}$

(vii) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ (viii) $\{5, 10, 15, ..., 100\}$

(ix) 100 اور 1000 کے درمیان تمام صحیح اعداد کا سیٹ

2 درج ذیل کو اندراجی طریقہ میں لکھیے۔

(i) $\{x \mid x$ ضعف ہے 3 کا $x \wedge x \leq 35\}$ (ii) $\{x | x \in R \wedge 2x+1=0\}$

(iii) $\{x | x \in P \wedge x < 12\}$ (iv) $\{x \mid$ کا مقسوم علیہ ہے 128، $x\}$

(v) $\{x | x = 2^n, n \in N \wedge n < 8\}$ (vi) $\{x | x \in N \wedge x+4=0\}$

(vii) $\{x | x \in N \wedge x = x\}$ (viii) $\{x | x \in Z \wedge 3x+1=0\}$

3۔ درج ذیل سیٹوں میں سے ہر ایک کے دو واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(i) $\{a, b, c\}$ (ii) $\{0, 1\}$ (iii) N (iv) Z

(v) Q (vi) R (vii) $\{x \mid x \in Q \wedge 0 < x \leq 2\}$

4۔ کیا کوئی ایسا سیٹ ہوتا ہے جس کا کوئی واجب تحتی سیٹ نہیں ہوتا؟ اگر ایسا ہے تو اس سیٹ کا نام لکھیے۔

5۔ $\{a, b\}$ اور $\{\{a, b\}\}$ میں کیا فرق ہے؟

6۔ درج ذیل سیٹوں میں سے ہر ایک کے پاور سیٹ کے ارکان کی تعداد کیا ہے؟

(i) $\{\ \}$ (ii) $\{0, 1\}$ (iii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(iv) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (v) $\{a, \{b, c\}\}$ (vi) $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$

7۔ درج ذیل سیٹوں میں سے ہر ایک کا پاور سیٹ لکھیں:

(i) $\{9, 11\}$ (ii) $\{+, -, \times, \div\}$ (iii) $\{\phi\}$ (iv) $\{a, \{b, c\}\}$

3.3 سیٹوں پر عوامل (Operations on Sets)

جس طرح اعداد پر جمع اور منفی وغیرہ کے عوامل کیے جاتے ہیں اسی طرح سیٹوں پر یونین اور تقاطع وغیرہ کے عوامل کیے جاتے ہیں۔ ہم ان سے پہلے ہی واقف ہیں۔ اہم خصوصیات کا جائزہ ذیل میں دیا گیا ہے:

دو سیٹوں کا یونین (Union of Two Sets)

دو سیٹوں A اور B کے یونین کو $A \cup B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ ایک ایسا سیٹ ہوتا ہے جو ان دونوں سیٹوں کے تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ علامتی طور پر ہم اسے یوں لکھتے ہیں:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

اس طرح اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ہو تو $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

دو سیٹوں کا تقاطع (Intersection of Two Sets)

دو سیٹوں A اور B کے تقاطع کو $A \cap B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ ایک ایسا سیٹ ہوتا ہے جو ان دونوں سیٹوں کے مشترک ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ علامتی طور پر ہم اسے یوں لکھتے ہیں:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

اس طرح، درج بالا سیٹوں A اور B کے لیے، $A \cap B = \{2, 3\}$

> **یاد رکھیے!**
> علامت $\vee$ کا مطلب ہے "یا"۔
> علامت $\wedge$ کا مطلب ہے "اور"۔

غیر مشترک سیٹ (Disjoint Sets)

اگر دو سیٹوں کا تقاطع خالی سیٹ ہو تو سیٹوں کو غیر مشترک سیٹ کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر، اگر طاق قدرتی اعداد کا سیٹ $= S_1$ اور جفت قدرتی اعداد کا سیٹ $= S_2$ ہو تو S_1 اور S_2 غیر مشترک سیٹ کہلاتے ہیں۔ اسی طرح کالج کے آرٹس کے طلبہ کا سیٹ اور سائنس کے طلبہ کا سیٹ غیر مشترک سیٹ ہیں۔

متراکب سیٹ (Overlapping Sets)

اگر دو سیٹوں کا تقاطع غیر خالی سیٹ ہو اور نہ ہی کوئی دوسرے سیٹ کا تحتی سیٹ ہو تو ایسے سیٹوں کو متراکب سیٹ کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $L = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ اور $M = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ہو تو L اور M متراکب سیٹ ہیں۔

دو سیٹوں کا فرق (Difference of Two Sets)

سیٹ A اور سیٹ B کے درمیان فرق کو $A - B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو کہ ان تمام ارکان پر مشتمل ہے جو سیٹ A سے تعلق رکھتے ہیں لیکن سیٹ B سے تعلق نہیں رکھتے ہیں۔ علامتی طور پر

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \text{ اور } B - A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$$

مثال کے طور پر اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ہو

تو $A - B = \{1, 2, 3\}$ اور $B - A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

نوٹ کریں کہ: $A - B \neq B - A$

سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of a Set)

سیٹ A کے کمپلیمنٹ کو A' یا A^c سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یونیورسل سیٹ U کے لحاظ سے ایسا سیٹ ہے جس میں U کے وہ تمام ارکان شامل ہیں جو سیٹ A کے رکن نہیں۔ علامتی طور پر:

$$A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

> **نوٹ:**
> کمپلیمنٹ اور دو سیٹوں کے فرق کی تعریف کے پیش نظر یہ واضح ہے کہ کسی بھی سیٹ A کے لیے، $A' = U - A$

مثال کے طور پر اگر $U = Z$ ہو تو $E' = O$ اور $O' = E$۔

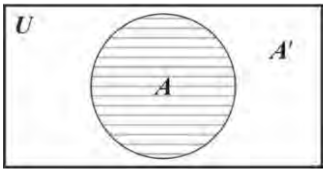
مثال کے طور پر اگر انگریزی زبان کے حروف تہجی کا سیٹ $= U$ اور حروفِ صحیح کا سیٹ $= C$، حروفِ علت کا سیٹ $= W$ ہو تو

$C' = W$ اور $W' = C$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

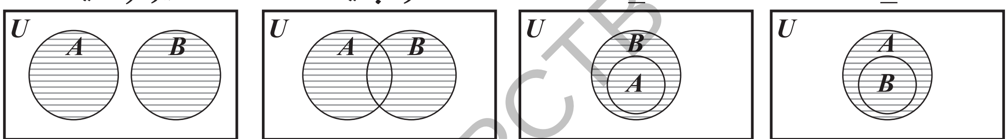
3.3.1 وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے سیٹوں کی شناخت
(Identification of Sets Using Venn Diagram)



سیٹ کے بنیادی تصورات اور سیٹوں کے درمیان تعلق کو بصری طور پر بیان کرنے میں وین اشکال بہت مفید ہیں۔ یہ اشکال سب سے پہلے ایک انگریز منطق دان اور ریاضی دان جان وین (1834 تا 1883عیسوی) نے استعمال کی تھیں۔ ملحقہ شکل میں، مستطیل یونیورسل سیٹ U کو ظاہر کرتا ہے اور لکیر دار گول حصہ سیٹ A کو ظاہر کرتا ہے اور مستطیل کا بقیہ حصہ A' یا $U - A$ کو ظاہر کرتا ہے۔

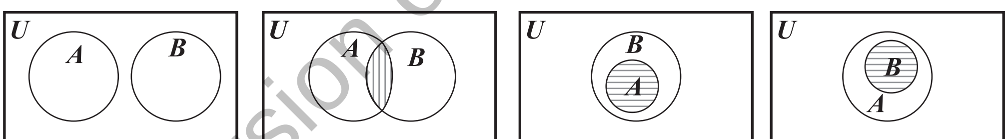
ذیل میں کچھ مزید اشکال دی گئی ہیں جو مختلف صورتوں میں دو سیٹوں پر بنیادی عوامل کو ظاہر کرتی ہیں (نیچے دکھائے گئے لکیر دار حصے ہر صورت میں متعلقہ عامل کے نتیجہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔

$A \cup B$



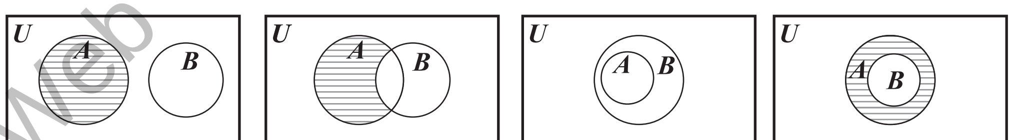
غیر مشترک سیٹ	متراکب سیٹ	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$
• $A \cap B = \phi$ • $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$	• $A \cap B \neq \phi$ • $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	• $A \cup B = B$ • $n(A \cup B) = n(B)$	• $A \cup B = A$ • $n(A \cup B) = n(A)$

$A \cap B$



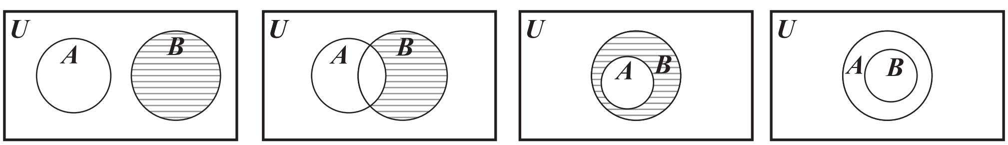
غیر مشترک سیٹ	متراکب سیٹ	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$
• $A \cap B = \phi$ • $n(A \cap B) = 0$	• $A \cap B \neq \phi$	• $A \cap B = A$ • $n(A \cap B) = n(A)$	• $A \cap B = B$ • $n(A \cap B) = n(B)$

$A - B$



غیر مشترک سیٹ	متراکب سیٹ	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$
• $A - B = A$ • $n(A - B) = n(A)$	• $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$	• $A - B = \phi$ • $n(A - B) = 0$	• $A - B \neq \phi$ • $n(A - B) = n(A) - n(B)$

$B - A$



غیر مشترک سیٹ	متراکب سیٹ	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$
• $B - A = B$ • $n(B - A) = n(B)$	• $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$	• $B - A \neq \phi$ • $n(B - A) = n(B) - n(A)$	• $B - A = \phi$ • $n(B - A) = 0$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

3.3.2 تین سیٹوں پر عوامل (Operations on Three Sets)

اگر A، B اور C تین دیے گئے سیٹ ہوں تو ان پر یونین اور تقاطع کے درج ذیل عوامل ہو سکتے ہیں:

(i) $A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cup B) \cup C$ (iii) $A \cap (B \cup C)$

(iv) $(A \cap B) \cap C$ (v) $A \cup (B \cap C)$ (vi) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

(vii) $(A \cup B) \cap C$ (viii) $(A \cap B) \cup C$ (ix) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

3.3.2.1 یونین اور تقاطع کی خصوصیات (Properties of union and intersection)

اب ہم دو یا تین سیٹوں کے یونین اور تقاطع کی بنیادی خصوصیات بیان کرتے ہیں۔

خصوصیات (Properties)

(i) $A \cup B = B \cup A$ (یونین کی خاصیت مبادلہ)

(ii) $A \cap B = B \cap A$ (تقاطع کی خاصیت مبادلہ)

(iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (یونین کی خاصیت تلازم)

(iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (تقاطع کی خاصیت تلازم)

(v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (یونین کی تقاطع پر خاصیت تقسیمی)

(vi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (تقاطع کی یونین پر خاصیت تقسیمی)

(vii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(viii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (ڈی مارگن کے قوانین)

سیٹوں کی خصوصیات کی تصدیق (Verification of the Properties Using Sets)

فرض کریں $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 3, 4, 5\}$ اور $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(i)
$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\} \; ; \; B \cup A = \{2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\} \; ; \; = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\therefore \quad A \cup B = B \cup A$$

(ii)
$$A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} \; ; \; B \cap A = \{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3\}$$
$$= \{2, 3\} \; ; \; = \{2, 3\}$$
$$\therefore \quad A \cap B = B \cap A$$

طلبہ خصوصیات (iii) اور (iv) کی خود تصدیق کریں۔

(v)
$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup [\{2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}]$$
$$= \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \ldots (a)$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = [\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\}] \cap [\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}]$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \ldots (b)$$

(a) اور (b) سے $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

طلبہ خصوصیت (vi) کی خود تصدیق کریں۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

(vii) فرض کریں اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \ldots(a)$$

$$A' = U - A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B' = U - B = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A' \cap B' = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

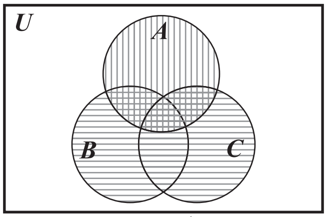
$$= \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \ldots(b)$$

(a)اور(b) سے $(A \cup B)' = A' \cap B'$

طلبہ خصوصیت (viii) کی خود تصدیق کریں۔

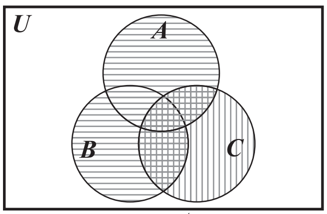
وین اشکال کی مدد سے خصوصیات کی تصدیق

(i)اور (ii) کی تصدیق بہت آسان ہے، اس لیے خود کریں۔



شکل(1)

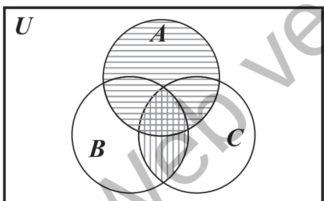
(iii) شکل (1) میں سیٹ A کو عمودی لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے اور $B \cup C$ کو افقی لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سیٹ $A \cup (B \cup C)$ کو اُفقی، عمودی اور دُوہرے لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل(2)

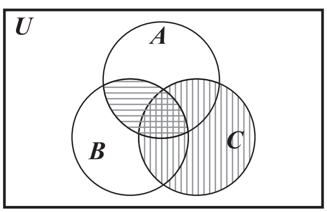
شکل(2) میں $A \cup B$ کو افقی لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے اور C کو عمودی لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ $A \cup (B \cup C)$ افقی، عمودی اور دوہرے لکیر دار حصے کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل(1) اور (2) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$



شکل(3)

(iv) شکل(3) میں $A \cap (B \cap C)$ کو دوہرے لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل(4)

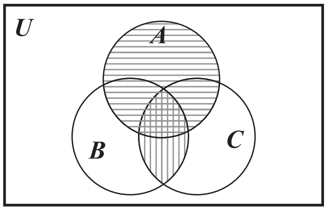
شکل(4) میں $(A \cap B) \cap C$ کو دوہرے لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

چوں کہ شکل(3) اور شکل(4) میں یہ حصے ایک جیسے ہیں،

پس $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

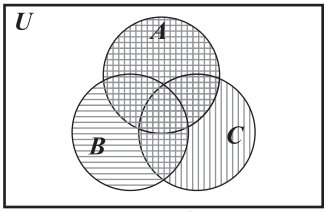
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



شکل(5)

(v) شکل(5) میں $A \cup (B \cap C)$ کو افقی لکیر دار حصے، عمودی لکیر دار حصے اور دوہرے لکیر دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔

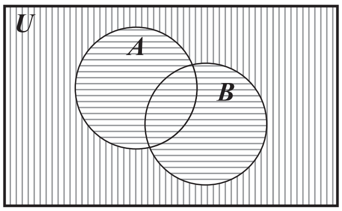


شکل(6)

شکل(6) میں $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ کو دوہرے لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

چوں کہ شکل(5) اور شکل(6) میں یہ حصے ایک جیسے ہیں،

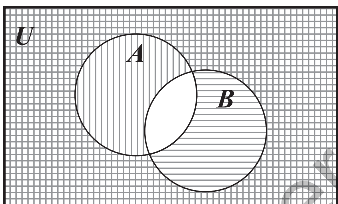
پس $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



شکل(7)

طلبہ خصوصیت (vi) کی خود تصدیق کریں۔

(vii) شکل(7) میں $(A \cup B)'$ کو عمودی لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل(8)

شکل(8) میں $A' \cap B'$ کو دوہرے لکیر دار حصہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

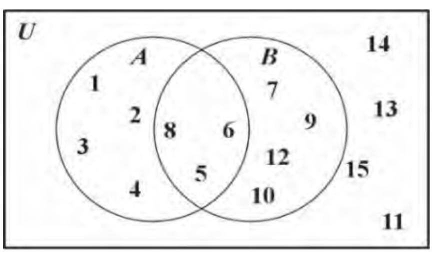
چوں کہ شکل(7) اور شکل(8) میں یہ حصے ایک جیسے ہیں،

پس $(A \cup B)' = A' \cap B'$

طلبہ خصوصیت (viii) کی خود تصدیق کریں۔

نوٹ :
اوپر دی گئی وین اشکال میں صرف متراکب سیٹوں پر غور کیا گیا ہے۔ اسی طرح دیگر صورتوں کی تصدیق بھی کی جاسکتی ہے۔

مثال 1- ملحقہ وین شکل پر غور کریں جو دو غیر خالی سیٹوں A اور B کو ظاہر کرتی ہے۔



(a) سیٹ A اور B میں مشترک ارکان کی تعداد معلوم کریں۔

(b) صرف سیٹ B کے وہ تمام ارکان معلوم کریں جو سیٹ A میں موجود نہ ہو۔

(c) سیٹ A اور B کا یونین معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل۔ وین شکل میں فراہم کردہ معلومات سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$
$$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$$

(a) A اور B دونوں سیٹوں میں موجود ارکان سیٹوں کا تقاطع ہیں

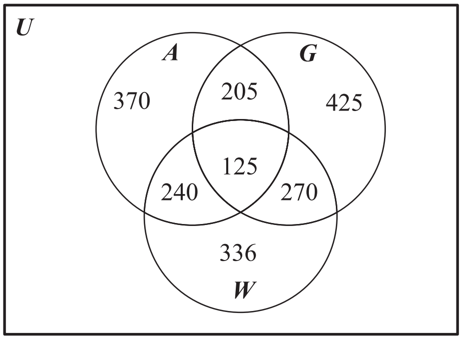
$$A \cap B = \{5, 6, 8\}$$

(b) وہ ارکان جو صرف سیٹ B میں ہیں، سیٹ A میں نہیں، سیٹوں کا فرق ہے

$$B - A = \{7, 9, 10, 12\}$$

(c)
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$$

مثال 2: ملحقہ وین شکل پر غور کریں جس میں ایک آئی ٹی ادارے میں مختلف کورسز میں داخلہ لینے والے طلبہ کو ظاہر کیا گیا ہے۔



$U =$ آئی ٹی ادارے میں داخلہ لینے والے طلبہ

$A =$ اپلائیڈ روبو ٹکس میں داخلہ لینے والے طلبہ

$G =$ گیم ڈویلپمنٹ میں داخلہ لینے والے طلبہ

$W =$ ویب ڈیزائننگ میں داخلہ لینے والے طلبہ

(a) کتنے طلبہ نے اپلائیڈ روبو ٹکس کورس میں داخلہ لیا؟

(b) گیم ڈویلپمنٹ میں داخلہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد معلوم کریں۔

(c) گیم ڈویلپمنٹ اور ویب ڈیزائننگ کورس میں کتنے طلبہ نے داخلہ لیا؟

(d) ان تمام طلبہ کی تعداد معلوم کریں جنھوں نے ویب ڈیولپمنٹ کے کورس میں داخلہ لیا لیکن اپلائیڈ روبو ٹکس کے کورس میں داخلہ نہیں لیا۔

(e) آئی ٹی کے ادارے میں کتنے طلبہ داخل ہیں؟

(f) تینوں کورسز میں کتنے طلبہ نے داخلہ لیا؟

حل: (a) سیٹ A اپلائیڈ روبو ٹکس پروگرام میں داخلہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

کُل تعداد $= 370 + 205 + 125 + 240 = 940$

پس، اپلائیڈ روبو ٹکس کورس میں طلبہ کی کل تعداد 940 ہے۔

(b) گیم ڈویلپمنٹ میں داخلہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد کو سیٹ G کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

کُل تعداد $= 205 + 125 + 270 + 425 = 1025$

پس، گیم ڈویلپمنٹ میں داخلہ لینے والے طلبہ کی تعداد 1025 ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(c) گیم ڈویلپمنٹ اور ویب ڈیزائننگ کورس دونوں میں کل طلبہ کا اندراج ہے سیٹ G اور W کا تقاطع ہے۔

$$G \cap W = 125 + 270 = 395$$

پس، 395 طلبہ نے گیم ڈویلپمنٹ اور ویب ڈیزائننگ کورس دونوں میں داخلہ لیا ہے۔

(d) وہ طلبہ جو ویب ڈویلپمنٹ کورس میں داخل ہیں لیکن اپلائیڈ روبو ٹکس میں نہیں وہ سیٹ W میں موجود قیمتوں 336 اور 270 کا مجموعہ ہیں۔

کُل تعداد $= 336 + 270 = 606$

لہٰذا، 606 طلبہ ایسے ہیں جنہوں نے ویب ڈویلپمنٹ کورسز میں داخلہ لیا لیکن اپلائیڈ روبو ٹکس میں نہیں۔

(e) آئی ٹی کے ادارے میں داخلہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد دائروں کے اندر موجود تمام قیمتوں سے ظاہر ہوتی ہے۔

کُل تعداد $= 370 + 205 + 125 + 240 + 425 + 270 + 336 = 1971$

آئی ٹی کے ادارے میں کل 1971 طلبہ داخل ہیں۔

(f) جن طلبہ نے تینوں کورسز میں داخلہ لیا ہے وہ تمام سیٹوں کی تقاطع ہے جس کو 125 سے ظاہر کیا گیا ہے۔

3.3.3 حقیقی دنیا میں اطلاق (Real-World Applications)

اس حصّے میں ہم سیٹ تھیوری کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل پر لاگو کرنا سیکھیں گے، جیسے کہ وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے درجہ بندی اور کیٹلاگ بنانے کے مسائل کو حل کرنا۔ ہم کچھ حقیقی زندگی کی صورتحال کا بھی جائزہ لیں گے، جیسے کہ آبادی کی درجہ بندی اور شاپنگ مالز میں مصنوعات کی درجہ بندی کرنا۔

اس مقصد کے لیے ہم سیٹ کی کارڈینلٹی کے تصور کا استعمال کرتے ہیں۔ کارڈینلٹی کسی سیٹ کے عناصر کی کل تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ کارڈینلٹی دراصل سیٹ کے سائز کو ظاہر کرتی ہے۔ کسی غیر خالی سیٹ A کے لیے، کارڈینلٹی کو $n(A)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ تو $n(A) = 6$ کسی سیٹ کی کارڈینلٹی معلوم کرنے کے لیے ہم درج ذیل اصول استعمال کرتے ہیں جسے دو یا تین مجموعوں کے لیے **اصول شمولیت واخراج** کہا جاتا ہے۔

دو سیٹوں کے لیے اصول شمولیت واخراج (Principle of Inclusion and Exclusion for Two Sets)

اگر A اور B دو متناہی سیٹ ہوں تو

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

اور $A \cup B$ ، $A \cap B$ بھی متناہی سیٹ ہیں۔

تین سیٹوں کے لیے اصول شمولیت واخراج (Principle of Inclusion and Exclusion for Three Sets)

اگر A ، B اور C تین متناہی سیٹ ہوں تو

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

اور $A \cup B \cup C$ ، $A \cap B$ ، $A \cap C$ ، $B \cap C$ اور $A \cap B \cap C$ بھی متناہی سیٹ ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP

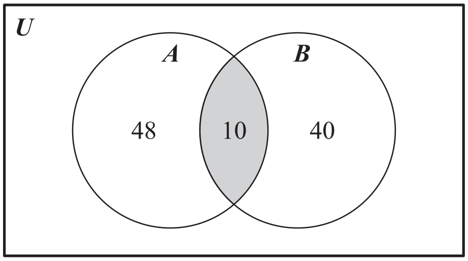
Web version of PCTB textbook

مثال3: ایک اسپورٹس کلب میں 98 سیکنڈری اسکول کے طلبہ ہیں۔ 58 طلبہ سوئمنگ کلب میں شامل ہوئے اور 50 نے رسہ کشی کلب میں شمولیت اختیار کی۔ دونوں کھیلوں میں کتنے طلبہ نے حصہ لیا؟

حل۔ اگر اسکول کے اسپورٹس کلب میں کل طلبہ $= U$

طلبہ جنہوں نے سوئمنگ کلب میں حصہ لیا $= A$

طلبہ جنہوں نے رسہ کشی کلب میں حصہ لیا $= B$



سوال کی عبارت سے ہم لکھ سکتے ہیں:

$$n(U) = n(A \cup B) = 98,\ n(A) = 58,\ n(B) = 50$$

ہم دونوں کلبوں میں حصہ لینے والے طلبہ کی کل تعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

$$n(A \cap B) = ?$$

دو سیٹوں کے لیے اصول شمولیت واخراج کا استعمال کرتے ہوئے۔

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 58 + 50 - 98$$

$$= 10$$

پس دونوں کلبوں میں 10 طلبہ نے حصہ لیا۔

وین شکل ہر سپورٹس کلب میں طلبہ کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال4: سلیم جو ایک اسکول ٹیچر ہے، اُس کے گھر میں ایک چھوٹی لائبریری ہے جس میں 150 کُتب ہیں۔ ان کے پاس ان کُتب کی دو اہم قسمیں ہیں: اسلامی اور سائنسی۔ انہوں نے 70 کُتب کو اسلامی کُتب اور 90 کُتب کو سائنس کی کُتب میں درجہ بندی کیا۔ 15 کُتب ایسی ہیں جو نہ تو اسلامی اور نہ ہی سائنسی کُتب کے زمرے میں آتی ہیں۔ کتنی کُتب اسلامی اور سائنسی دونوں زمروں میں درجہ بندی کی گئی ہیں؟

حل:

لائبریری میں کُتب کی کل تعداد $= U$

اسلامی زمرے میں 70 کُتب ہیں $= A$

سائنسی زمرے میں 90 کُتب ہیں $= B$

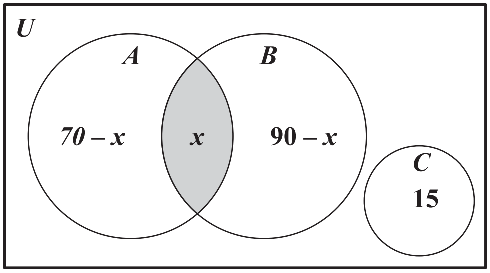
15 کُتب ایسی ہیں جو کسی بھی زمرے میں شامل نہیں ہیں $= C$

کُتب کی تعداد جو دونوں زمروں سے تعلق رکھتی ہیں $= x$

اگلے صفحے پر دی گئی وین شکل ان کُتب کی تعداد ہے جن کی اسلامی اور سائنسی دونوں زمروں میں درجہ بندی کی گئی ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



چوں کہ $n(U) = 150$

اس لیے $70 - x + x + 90 - x + 15 = 150$

$$\Rightarrow \quad 175 - x = 150$$

$$\Rightarrow \quad x = 25$$

پس 25 کُتب کی اسلامی اور سائنسی دونوں زمروں میں درجہ بندی کی گئی ہیں۔

مثال 5: ایک کالج میں 45 اساتذہ ریاضی یا فزکس یا کیمسٹری پڑھاتے ہیں۔ یہاں مختلف مضامین پڑھانے والے اساتذہ کے بارے میں معلومات دی گئی ہے۔

- 18 ریاضی پڑھاتے ہیں۔
- 12 فزکس پڑھاتے ہیں۔
- 8 کیمسٹری پڑھاتے ہیں۔
- 6 ریاضی اور فزکس دونوں پڑھاتے ہیں۔
- 4 فزکس اور کیمسٹری دونوں پڑھاتے ہیں۔
- 2 ریاضی اور کیمسٹری دونوں پڑھاتے ہیں۔

کتنے اساتذہ تینوں مضامین پڑھاتے ہیں؟

حل۔ اگر $U =$ کالج میں اساتذہ کی کل تعداد

$M =$ اساتذہ جو ریاضی پڑھاتے ہیں

$P =$ اساتذہ جو فزکس پڑھاتے ہیں

$C =$ اساتذہ جو کیمسٹری پڑھاتے ہیں

اوپر دیے گئے سوال کی عبارت سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$n(M \cup P \cup C) = 45,\ n(M) = 18,\ n(P) = 12,\ n(C) = 8,\ n(M \cap P) = 6,$$
$$n(P \cap C) = 4,\ n(M \cap C) = 2$$

ہم تمام مضامین پڑھانے والے اساتذہ کی کل تعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

$$n(M \cap P \cap C) = ?$$

تین سیٹوں کے لیے اصول شمولیت و اخراج کا استعمال کرتے ہوئے

$$n(M \cup P \cup C) = n(M) + n(P) + n(C) - n(M \cap P) - n(P \cap C) - n(M \cap C) + n(M \cap P \cap C)$$

$$\Rightarrow \quad n(M \cap P \cap C) = n(M \cup P \cup C) - n(M) - n(P) - n(C) + n(M \cap P) + n(P \cap C) + n(M \cap C)$$
$$= 45 - 18 - 12 - 8 + 6 + 4 + 2 = 19$$

پس 19 اساتذہ تینوں مضامین پڑھاتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 6: ایک شاپنگ مال میں 130 صارفین کا سروے کیا گیا جس میں ان سے خریداری کی ترجیحات کے بارے میں پوچھا گیا۔
سروے کے نتائج نے درج ذیل اعداد و شمار ظاہر کیے:

- 57 صارفین نے گارمنٹس کی خریداری کی
- 50 صارفین نے کا سنگھار کا سامان خریدا
- 46 صارفین نے الیکٹرانکس کی اشیا خریدی
- 31 صارفین نے گارمنٹس اور سنگھار دونوں کا سامان خریدا
- 25 صارفین نے گارمنٹس اور الیکٹرانکس دونوں کی خریداری کی
- 21 صارفین نے کا سنگھار اور الیکٹرانکس دونوں کی خریداری کی
- 12 صارفین نے تینوں مصنوعات یعنی گارمنٹس، سنگھار اور الیکٹرانکس کی خریداری کی

(a) کتنے صارفین نے کم از کم ایک مصنوعات خریدی: گارمنٹس، سنگھار یا الیکٹرانکس؟

(b) کتنے صارفین نے صرف ایک مصنوعات خریدی: گارمنٹس، سنگھار یا الیکٹرانکس؟

(c) کتنے صارفین نے تین میں سے کوئی بھی مصنوعات نہیں خریدی؟

حل۔ فرض کریں

$U =$ شاپنگ مال میں سروے کیے گئے صارفین کی کل تعداد

$G =$ صارفین جنہوں نے گارمنٹس خریدے

$C =$ صارفین جنہوں نے سنگھار کا سامان خریدا

$E =$ صارفین جنہوں نے الیکٹرانکس کی اشیا خریدیں

اوپر دیے گئے سوال کی عبارت سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$n(U) = 130,\ n(G) = 57,\ n(C) = 50,\ n(E) = 46,\ n(G \cap C) = 31,$$
$$n(G \cap E) = 25,\ n(C \cap E) = 21 \text{ اور } n(G \cap C \cap E) = 12.$$

(a) ہم ان صارفین کی کل تعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں جنہوں نے کم از کم ایک مصنوعات خریدی ہیں: گارمنٹس یا سنگھار کا سامان یا الیکٹرانکس۔

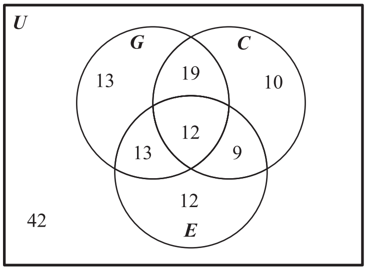
تین سیٹوں کے لیے اصول شمولیت و اخراج کا استعمال کرتے ہوئے

$$n(G \cup C \cup E) = n(G)+n(C)+n(E) - n(G \cap C) - n(G \cap E) - n(C \cap E)+n(G \cap C \cap E)$$
$$= 57 + 50 + 46 - 31 - 25 - 21 + 12 = 88$$

پس 88 صارفین نے کم از کم ان مصنوعات میں سے ایک خریدی: گارمنٹس، سنگھار کا سامان یا الیکٹرانکس۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook



(b) وہ صارفین جنہوں نے صرف گارمنٹس کی خریداری کی

$= n(G) - n(G \cap C) - n(G \cap E) + n(G \cap C \cap E)$
$= 57 - 31 - 25 + 12 = 13$

وہ صارفین جنہوں نے صرف سنگھار کا سامان خریدا

$= n(C) - n(G \cap C) - n(C \cap E) + n(G \cap C \cap E)$
$= 50 - 31 - 21 + 12 = 10$

وہ صارفین جنہوں نے صرف الیکٹرانکس کی خریداری کی

$= n(E) - n(G \cap E) - n(C \cap E) + n(G \cap C \cap E)$
$= 46 - 25 - 21 + 12 = 12$

لہٰذا جن صارفین نے صرف ایک مصنوعات خریدی: گارمنٹس، سنگھار یا الیکٹرانکس
$= 13 + 10 + 12 = 35$

(c) چوں کہ سروے کیے گئے صارفین کی کل تعداد 130 تھی اور 88 صارفین نے کم از کم ان مصنوعات میں سے ایک خریدی: گارمنٹس، سنگھار یا الیکٹرانکس۔ جن صارفین نے تین میں سے کوئی بھی مصنوعات نہیں خریدی ان کا حساب اس طرح لگایا جا سکتا ہے:

چیلنج!
درج بالا وین شکل مثال 6 میں پیش کردہ منظر نامے کی وضاحت کرتی ہے۔ کیا آپ ہر دائرے کے اندر موجود قیمتوں کی وضاحت فراہم کر سکتے ہیں؟

$$n(G \cup C \cup E)' = n(U) - n(G \cup C \cup E)$$
$$= 130 - 88 = 42$$

لہٰذا 42 صارفین نے تین میں سے کوئی بھی مصنوعات نہیں خریدیں۔

مشق 3.2

1۔ یونیورسل سیٹ پر غور کریں $\{30 \geq x > 0 \wedge$ کا 2 ضعف ہے $x \mid x\} = U$،
$\{$کا 6 ضعف ہے $x \mid x\} = A$ اور $\{$کا 8 ضعف ہے $x \mid x\} = B$

(i) سیٹ A اور B کے تمام ارکان کو اندراجی طریقہ میں لکھیں۔ (ii) $A \cap B$ معلوم کریں
(iii) وین اشکال بنائیں

2۔ فرض کریں $\{150 \geq x > 0 \wedge$ ایک صحیح عدد ہے $x \mid x\} = U$،
$\{$ایک صحیح عدد m کے لیے $x = 2^m \mid x\} = G$ اور $\{$ایک مربع ہے $x \mid x\} = H$

(i) سیٹ G اور H کے تمام ارکان کو اندراجی طریقہ میں لکھیں۔ (ii) $G \cup H$ معلوم کریں۔
(iii) $G \cap H$ معلوم کریں۔

3۔ فرض کریں $\{20 \geq x > 0 \wedge$ ایک مفرد عدد ہے $x \mid x\} = P$ اور
$\{20 \geq x > 0 \wedge$ کا ایک مقسوم علیہ ہے 210 $x \mid x\} = Q$

(i) $P \cap Q$ معلوم کریں (ii) $P \cup Q$ معلوم کریں

Web version of PCTB textbook
NOT FOR SALE-PESRP

4۔ سیٹوں کے درج ذیل جوڑوں کے لیے یونین اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کو ثابت کریں:

(i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{4, 6, 8, 10\}$

(ii) N, Z

(iii) $A = \{ x \mid x \in R \wedge x \geq 0\}$ ، $B = R$

5۔ اگر $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ ، $A = \{a, b, c, d, g, h\}$ اور $B = \{c, d, e, f, j\}$ ہو تو ان سیٹوں کے لیے ڈی مورگن کے قوانین کو ثابت کریں۔ وین اشکال بھی بنائیں۔

6۔ اگر $U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ اور $A = \{1, 3, 5, \ldots, 19\}$ ہو تو درج ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap U = A$ (iii) $A \cap A' = \phi$

7۔ 55 طلبہ کی کلاس میں 34 کرکٹ کھیلنا پسند کرتے ہیں اور 30 ہاکی کھیلنا پسند کرتے ہیں۔ نیز ہر طالب علم کم از کم دو میں سے ایک کھیل کھیلنا پسند کرتا ہے۔ کتنے طلبہ دونوں کھیل کھیلنا پسند کرتے ہیں؟

8۔ 500 ملازمین کے گروہ میں 250 اردو بول سکتے ہیں 150 انگریزی بول سکتے ہیں 50 پنجابی بول سکتے ہیں 40 اردو اور انگریزی بول سکتے ہیں 30 انگریزی اور پنجابی دونوں بول سکتے ہیں اور 10 اردو اور پنجابی بول سکتے ہیں۔ کتنے لوگ تینوں زبانیں بول سکتے ہیں؟

9۔ کھیلوں کے مقابلوں میں 19 لوگ نیلی شرٹس پہنتے ہیں 15 سبز قمیضیں پہنتے ہیں 3 نیلی اور سبز قمیضیں پہنتے ہیں 4 ٹوپی اور نیلی قمیض پہنتے ہیں اور 2 ٹوپی اور سبز قمیضیں پہنتے ہیں۔ نیلی یا سبز قمیض یا ٹوپی والے لوگوں کی کل تعداد 34 ہے۔ کتنے لوگ ٹوپی پہنے ہوئے ہیں؟

10۔ ایک تربیتی نشست میں 17 شرکا کے پاس لیپ ٹاپ، 11 کے پاس ٹیبلیٹ، 9 کے پاس لیپ ٹاپ اور ٹیبلیٹ، 6 کے پاس لیپ ٹاپ اور کُتب اور 4 کے پاس ٹیبلیٹ اور کُتب ہیں۔ 8 شرکاء کے پاس تینوں اشیا ہیں۔ لیپ ٹاپ، ٹیبلیٹ یا کُتب کے ساتھ شرکا کی کل تعداد 35 ہے۔ کتنے شرکا کے پاس کُتب ہیں؟

11۔ ایک شاپنگ مال میں 1 سے 150 لیبل والے 150 ملازمین ہیں جو یونیورسل سیٹ U کو ظاہر کرتے ہیں۔ ملازمین درج ذیل زمروں میں آتے ہیں:

- سیٹ A: 40 ملازمین جن کی تنخواہ کی حد 30 ہزار تا 45 ہزار ہے، جس پر 50 سے 89 تک کا لیبل لگایا گیا ہے۔
- سیٹ B: 50 ملازمین جن کی تنخواہ کی حد 50 ہزار تا 80 ہزار ہے، جس کا لیبل 101 سے 150 تک ہے۔
- سیٹ C: 60 ملازمین جن کی تنخواہ کی حد 100 ہزار تا 150 ہزار ہے، 1 سے 49 اور 90 سے 100 تک کا لیبل لگا ہوا ہے۔

(a) $(A' \cup B') \cap C$ معلوم کریں (b) $n\{A \cap (B' \cap C')\}$ معلوم کریں

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

12۔ ایک سیکنڈری اسکول میں 125 طلبہ میں سے ہر ایک درج ذیل میں سے کم از کم ایک کھیل میں حصہ لیتا ہے: کرکٹ، فٹ بال یا ہاکی۔

- 60 طلبہ کرکٹ کھیلتے ہیں۔
- 70 طلبہ فٹ بال کھیلتے ہیں۔
- 40 طلبہ ہاکی کھیلتے ہیں۔
- 25 طلبہ کرکٹ اور فٹ بال دونوں کھیلتے ہیں۔
- 15 طلبہ فٹ بال اور ہاکی دونوں کھیلتے ہیں۔
- 10 طلبہ کرکٹ اور ہاکی دونوں کھیلتے ہیں۔

(a) کتنے طلبہ تینوں کھیل کھیلتے ہیں؟

(b) تمام کھیلوں میں شرکت کی تقسیم کو ظاہر کرنے کے لیے وین اشکال بنائیں۔

13۔ ایک سروے کیا گیا جس میں 130 لوگوں سے ان کے پسندیدہ کھانے کے بارے میں پوچھا گیا۔ سروے کے نتائج نے درج ذیل اعداد و شمار ظاہر کیے:

- 40 لوگوں نے کہا کہ وہ نہاری کو پسند کرتے ہیں۔
- 65 لوگوں نے کہا کہ انھیں بریانی پسند ہے۔
- 50 لوگوں نے کہا کہ انھیں قورمہ پسند ہے۔
- 20 لوگوں نے کہا کہ انھیں نہاری اور بریانی پسند ہے۔
- 35 لوگوں نے کہا کہ انھیں بریانی اور قورمہ پسند ہے۔
- 27 لوگوں نے کہا کہ انھیں نہاری اور قورمہ پسند ہے۔
- 12 لوگوں نے کہا کہ انھیں تینوں کھانے نہاری، بریانی اور قورمہ پسند ہیں۔

(a) کم از کم کتنے لوگوں کو نہاری، بریانی یا قورمہ پسند ہے؟

(b) کتنے لوگوں کو نہاری، بریانی یا قورمہ پسند نہیں آیا؟

(c) کتنے لوگ درج بالا کھانوں میں سے صرف ایک کو پسند کرتے ہیں: نہاری، بریانی یا قورمہ؟

(d) وین اشکال بنائیں۔

3.4 ثنائی ربط (Binary Relations)

روزمرہ زندگی میں، ربط کا مطلب دو افراد یا اشیا کے درمیان تعلق کی ایک تجریدی قسم ہے، مثال کے طور پر، (استاد، شاگرد)، (ماں، بیٹا)، (شوہر، بیوی)، (بھائی، بہن)، (دوست، دوست) اور (گھر، مالک)۔ ریاضی میں بھی کچھ عوامل دو اعداد کے درمیان ربط کا تعین کرتے ہیں، مثال کے طور پر:

$(5, 4)$: > ؛ $(25, 5)$: مربع ؛ $(2, 4)$: جذر ؛ $(2 \times 2, 4)$: مساوی

درج بالا مثالوں میں > ، مربع ، جذر اور مساوی ربط کی مثالیں ہیں۔ ریاضی میں، ایک ربط مترتب جوڑوں کا کوئی بھی سیٹ ہوتا ہے۔ مترتب جوڑوں کے عناصر کے درمیان ربط کا ذکر ممکن بھی ہے اور ناممکن بھی۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

(i) اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہوں تو ان کا کارتیسی حاصل ضرب ایک ایسا سیٹ ہوتا ہے جو تمام مترتب جوڑوں (x, y) پر مشتمل ہوتا ہے جب کہ $x \in A$ اور $y \in B$ اور اس کو ہم علامتی طور پر $A \times B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$ لکھ سکتے ہیں۔

(ii) کارتیسی حاصل ضرب $A \times B$ کا ہر تحتی سیٹ ثنائی ربط یا صرف ربط کہلاتا ہے۔ عام طور پر ایک ربط کو حرف r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(iii) تمام مترتب جوڑوں کے پہلے ارکان کا سیٹ جو کہ ثنائی ربط بناتا ہے، اس سیٹ کا ڈومین کہلاتا ہے۔ کسی بھی ربط r کی ڈومین کو Dom r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(iv) تمام مترتب جوڑوں کے دوسرے ارکان کا سیٹ جو کہ ثنائی ربط بناتا ہے، اس سیٹ کی رینج کہلاتا ہے۔ کسی بھی ربط r کی رینج کو Range r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(v) اگر A ایک غیر خالی سیٹ ہے تو $A \times A$ کے کسی بھی تحتی سیٹ کو A میں ربط کہا جاتا ہے۔

مثال 7: فرض کریں c_1, c_2, c_3 تین بچے ہوں اور m_1, m_2 دو آدمی ایسے ہوں کہ دونوں c_1, c_2 کا باپ m_1 ہو اور c_3 کا باپ m_2 ہو۔ ربط معلوم کریں {(بچہ، باپ)}۔

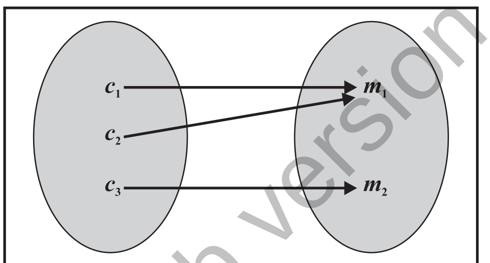
حل: $C =$ بچوں کا سیٹ $= \{c_1, c_2, c_3\}$ اور $F =$ باپ کا سیٹ $= \{m_1, m_2\}$

C اور F کی کارتیسی حاصل ضرب:

$$C \times F = \{(c_1, m_1), (c_1, m_2), (c_2, m_1), (c_2, m_2), (c_3, m_1), (c_3, m_2)\}$$

$r =$ (بچہ، باپ) مترتب جوڑوں کا سیٹ

$= \{(c_1, m_1), (c_2, m_1), (c_3, m_2)\}$



مثال 8: فرض کریں $A = \{1, 2, 3\}$ ۔ ایسا ربط r معلوم کریں کہ xry جب صرف اور صرف $x < y$ ہو۔ نیز اس کی ڈومین اور رینج بھی معلوم کریں۔

حل: $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

واضح طور پر مطلوبہ ربط یہ ہے: $r = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

Dom $r = \{1, 2\}$, Range $r = \{2, 3\}$

3.4.1 ربط بطور جدول، مترتب جوڑا اور گراف (Relation as Table, Ordered Pair and Graphs)

ہم نے یہ سیکھا ہے کہ ریاضی میں **ربط** کارتیسی حاصل ضرب کا کوئی بھی تحتی سیٹ ہوتا ہے، جس میں تمام مترتب جوڑے شامل ہوتے ہیں۔ ہر مترتب جوڑے میں دو محددات x اور y شامل ہوتے ہیں۔ x محدد کو عرض کہا جاتا ہے اور y محدد کو طول کہا جاتا ہے جو اکثر ایک مدخل اور ایک مخرج کو ظاہر کرتے ہیں۔ اب ہم ربط کو تین مختلف طریقوں سے بیان کرتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مترتب جوڑے ایک ربط کو مترتب جوڑوں کے سیٹ کی صورت میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً ایک پانی کی ٹینکی کو دیکھیں جس میں پہلے سے 1 لٹر پانی موجود ہے۔ ہر منٹ کے بعد ٹینکی میں 1 لٹر اضافی پانی ڈالا جاتا ہے۔ اس صورت حال کو ربط $r = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جب کہ x (منٹوں میں) وہ وقت ہے جو ٹینکی بھرنے کے شروع ہونے کے بعد سے گزرا ہے اور y ٹینکی میں موجود پانی کی کل مقدار (لٹروں میں) ہے۔

جب $x = 0$ ، $y = 1$ اور $x = 1$ ، $y = 2$

مترتب جوڑے میں یہ ربط اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے

$$\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$$

درج بالا ربط کو جدول کی صورت میں درج ذیل انداز میں پیش کیا جا سکتا ہے:

جدول

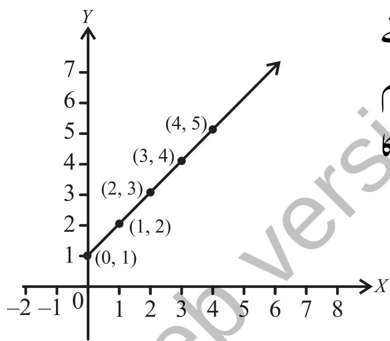
x (وقت منٹوں میں)	$y = x + 1$ (پانی لٹروں میں)
0	$y = 0 + 1 = 1$
1	$y = 1 + 1 = 2$
2	$y = 2 + 1 = 3$
3	$y = 3 + 1 = 4$
4	$y = 4 + 1 = 5$
5	$y = 5 + 1 = 6$

گراف: ہم روابط کو بصری طور پر بھی ایک گراف بنا کر ظاہر کر سکتے ہیں۔ خاکہ بنانے کے لیے، ہم مترتب شدہ جوڑوں کا استعمال کرتے ہیں۔ ہر مترتب جوڑے (x, y) کو ہم کارتیسی مستوی میں ایک نقطے کے طور پر ظاہر کرتے ہیں، جہاں x مترتب شدہ جوڑے کا پہلا رکن ہے اور y دوسرا رکن ہے۔

ربط کو گراف کے طور پر ان نقاط سے گزرنے والے خط کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے،

$$\{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$$

جیسا کہ دی گئی شکل میں دکھایا گیا ہے۔



3.4.2 تفاعل اور اس کی ڈومین اور رینج (Function and its Domain and Range)

تفاعل (Function)

ایک بہت اہم اور خاص قسم کا ربط ایک تفاعل ہوتا ہے جس کی وضاحت ذیل میں کی گئی ہے۔

فرض کریں کہ A اور B دو ایسے غیر خالی سیٹ ہیں کہ

(i) f ایک ربط ہے جو A سے B تک ہے، یعنی f تحتی سیٹ ہے $A \times B$ کا۔

(ii) $\text{Dom } f = A$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(iii) اگر f کے کسی بھی دو جوڑوں کا پہلا رکن برابر نہ ہو تو f کو A سے B تک ایک تفاعل کہا جاتا ہے۔

تفاعل f کو اس طرح بھی لکھا جاتا ہے:

$$f \; : \; A \rightarrow B$$

اس کو ایسے پڑھا جاتا ہے کہ f ایک تفاعل ہے جو A سے B کی جانب ہے۔ ہر مترتب جوڑے کے پہلے ارکان کا سیٹ f کی ڈومین (domain) کہلاتا ہے اور تمام دوسرے ارکان کا سیٹ f کی رینج (range) کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہاں f کا ڈومین A ہے اور f کی رینج B ہے۔

اگر (x, y) کو f کا ایک رکن سمجھا جائے جب کہ یہ مترتب جوڑوں کے سیٹ کے طور پر ہو تو ہم $y = f(x)$ لکھتے ہیں۔

y کو f کی قیمت x کے لیے یا f کے تحت x کی تصویر کہا جاتا ہے۔

مثال 9: اگر $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$، ایک تفاعل $f : A \rightarrow B$ کو بیان کریں،

$$f = \{(x, y) \mid y = 2x + 3, x \in A \wedge y \in B\}$$

تفاعل f کی قیمت، اس کی ڈومین، کوڈومین اور رینج معلوم کریں۔

حل: ہمیں دیا گیا ہے $y = 2x + 3$; $x \in A$ اور $y \in B$ تو تفاعل کی قیمت

$$f = \{(0, 3), (1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11)\}$$

$$\text{Dom} f = \{0, 1, 2, 3, 4\} = A$$

$\Rightarrow$ Co-domain $f = B$ اور

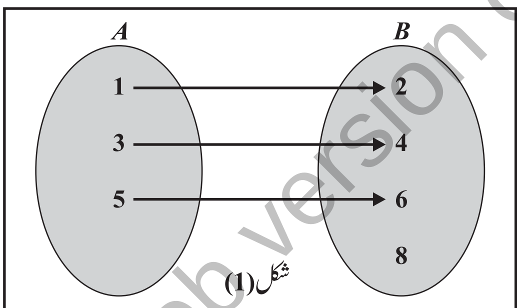
$\Rightarrow$ Range $f = \{3, 5, 7, 9, 11\} \subseteq B$

تفاعل کی اقسام (Types of Functions)

اس حصے میں ہم مختلف اقسام کے تفاعل پر گفتگو کریں گے۔

(i) ان ٹو تفاعل (Into Function)

اگر سیٹ A سے B کی جانب f ایسا تفاعل ہو کہ $\text{Range } f \subset B$ یعنی $\text{Range } f \neq B$، تب f کو A سے B کی جانب اِن ٹو تفاعل کہتے ہیں۔ شکل (1) میں f واضح طور پر ایک تفاعل ہے۔ لہٰذا f سیٹ A سے B کی جانب ان ٹو تفاعل ہے۔



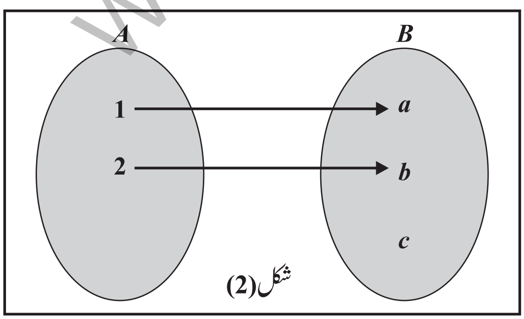
شکل (1)

$f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

(ii) ون۔ون تفاعل یا اِن جیکٹو تفاعل

(One - One) Function (Injective Function)

اگر ایک تفاعل f جو کہ A سے B کی جانب اس طرح ہو کہ اس کے



شکل (2)

$f = \{(1, a), (2, b)\}$

Web version of PCTB textbook

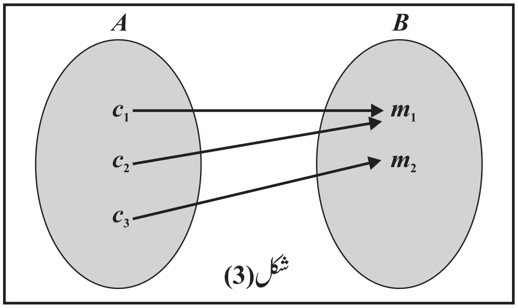
NOT FOR SALE-PESRP

کسی بھی دو مترتب جوڑوں کے دوسرے ارکان ایک جیسے نہ ہوں، تو اسے اِن جیکٹِو تفاعل کہا جاتا ہے؛ شکل (2) میں دکھایا گیا تفاعل ایک ایسا ہی تفاعل ہے۔

(iii) آن ٹو تفاعل یا سر جیکٹِو تفاعل

Onto Function (Surjective function)

اگر ایک تفاعل $f: A \rightarrow B$ ایسا ہو کہ Range $f = B$ ہو، یعنی سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کے ارکان کی تصویر ہو تو تفاعل f کو آن ٹو تفاعل یا سر جیکٹِو تفاعل کہا جاتا ہے۔



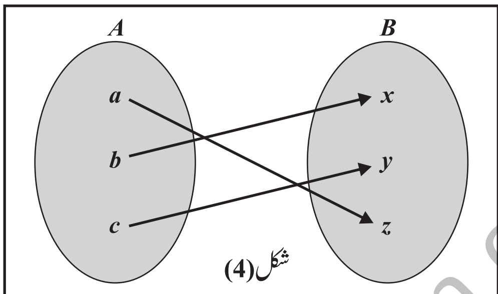
شکل(3)

$f = \{(c_1, m_1), (c_2, m_1), (c_3, m_2)\}$

(iv) ون۔ون اور آن ٹو تفاعل یا بائی جیکٹِو تفاعل

(One – One) and onto Function (or Bijective Function)

ایک تفاعل f کو سیٹ A سے سیٹ B تک بائی جیکٹِو تفاعل کہا جاتا ہے اگر یہ ون۔ون اور آن ٹو دونوں ہو۔ ایسے تفاعل کو سیٹ A اور B کے درمیان (1-1) کی مطابقت بھی کہا جاتا ہے۔ (a, z)، (b, x) اور (c, y) مطابقت رکھنے والے ارکان کے جوڑے ہیں، یعنی اس صورت میں $f = \{(a, z), (b, x), (c, y)\}$ جو سیٹ A اور B کے درمیان ایک بائی جیکٹِو تفاعل یا (1-1) مطابقت ہے۔



شکل(4)

$f = \{(a, z), (b, x), (c, y)\}$

3.4.3 تفاعل کی علامت (Notation of Function)

ہم جانتے ہیں کہ ترقیم سیٹ ساز لامتناہی سیٹوں کے لیے زیادہ موزوں ہے۔ یہی معاملہ ایک ایسے تفاعل کے ساتھ بھی ہے جو لامحدود مترتب جوڑوں پر مشتمل ہو۔ مثال کے طور پر، درج ذیل تفاعل پر غور کریں:

$$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), \ldots\}$$

$$\text{Dom } f = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

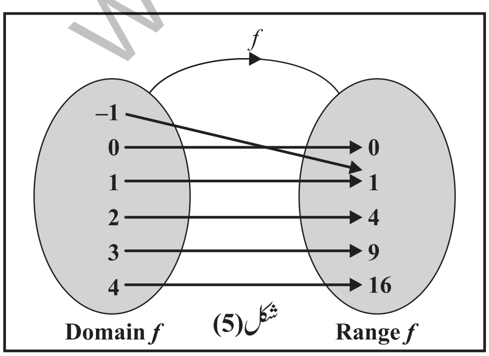
اور

$$\text{Range } f = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

اس تفاعل کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:

$$f = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x \in N\}$$

تفاعل کے لیے نقشہ سازی کا خاکہ شکل (5) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(5)

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

3.4.4 خطی اور دو درجی تفاعل (Linear and Quadratic Functions)

تفاعل $\{(x, y) \mid y = mx + c\}$ کو خطی تفاعل کہا جاتا ہے کیوں کہ اس کا گراف (جیومیٹری میں اظہار) ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $y = mx + c$ شکل والی مساوات ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔ تفاعل $\{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c\}$ کو دو درجی تفاعل کہا جاتا ہے۔ ہم یونٹ 10 میں ان کا جیومیٹری میں اظہار کا مطالعہ کریں گے۔

مثال 10: اگر $f(x) = 2x - 1$ اور $g(x) = x^2 - 3$ ہو تو معلوم کریں:

(i) $f(1)$ (ii) $f(-3)$ (iii) $f(7)$
(iv) $g(1)$ (v) $g(-3)$ (vi) $g(4)$

حل:

(i) $f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$ (ii) $f(-3) = 2 \times (-3) - 1 = -7$
(iii) $f(7) = 2 \times 7 - 1 = 13$ (iv) $g(1) = (1)^2 - 3 = -2$
(v) $g(-3) = (-3)^2 - 3 = 6$ (vi) $g(4) = (4)^2 - 3 = 13$

مثال 11: فرض کریں $f(x) = ax + b + 3$، جب کہ a اور b مستقل اعداد ہیں۔ اگر $f(1) = 4$ اور $f(5) = 9$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = ax + b + 3$

اگر $f(1) = 4$

تب $a \times 1 + b + 3 = 4$

$\Rightarrow \quad a + b = 1 \quad ...(i)$

اسی طرح، $f(5) = 9$

$\Rightarrow \quad a \times 5 + b + 3 = 9$

$\Rightarrow \quad 5a + b = 6 \quad ...(ii)$

مساوات (i) کو مساوات (ii) سے تفریق کریں، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(5a + b) - (a + b) = 6 - 1$$
$$5a + b - a - b = 5$$
$$4a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

مساوات (i) میں $a = \frac{5}{4}$ رکھنے سے $\frac{5}{4} + b = 1$

$$b = 1 - \frac{5}{4}$$
$$\Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

پس $a = \frac{5}{4}$ اور $b = -\frac{1}{4}$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

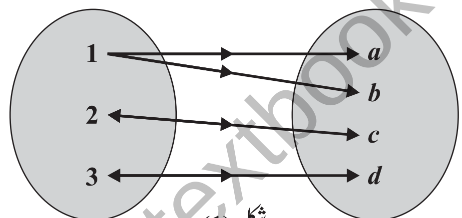
مشق 3.3

1۔ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ کے لیے درج ذیل ربط A میں معلوم کریں۔ ہر ربط کی ڈومین اور رینج بھی معلوم کریں۔

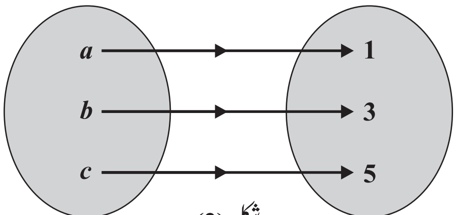
(i) $\{(x, y) \mid y = x\}$ (ii) $\{(x, y) \mid y + x = 5\}$

(iii) $\{(x, y) \mid x + y < 5\}$ (iv) $\{(x, y) \mid x + y > 5\}$

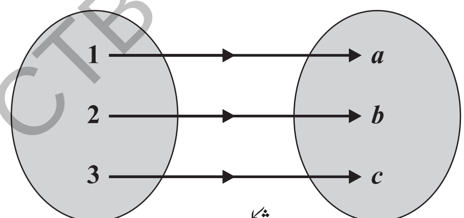
2۔ درج ذیل میں سے کون سی اشکال تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں اور کس قسم کے تفاعل ہیں؟



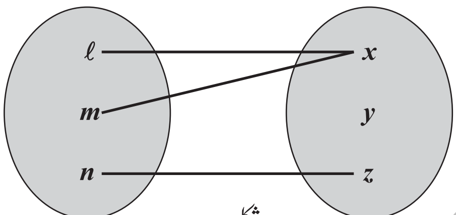
شکل(1)



شکل(2)



شکل(3)



شکل(4)

3۔ اگر $g(x) = 3x + 2$ اور $h(x) = x^2 + 1$ ہو تو درج ذیل معلوم کریں:

(i) $g(0)$ (ii) $g(-3)$ (iii) $g\left(\frac{2}{3}\right)$

(iv) $h(1)$ (v) $h(-4)$ (vi) $h\left(-\frac{1}{2}\right)$

4۔ فرض کریں $f(x) = ax + b + 1$ جب کہ a اور b مستقل اعداد ہیں۔ اگر $f(3) = 8$ اور $f(6) = 14$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

5۔ فرض کریں $g(x) = ax + b + 5$ جب کہ a اور b مستقل اعداد ہیں۔ اگر $g(-1) = 0$ اور $g(2) = 10$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

6۔ فرض کریں $f(x) = 5x + 2$ اگر $f(x) = 32$ ہو، تو x کی قیمت معلوم کریں۔

7۔ فرض کریں $f(x) = cx^2 + d$ جب کہ c اور d مستقل اعداد ہیں۔ اگر $f(1) = 6$ اور $f(-2) = 10$ ہو تو c اور d کی قیمتیں معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جائزہ مشق 3

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) سیٹ $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, ...\right\}$ کی ترقیم سیٹ ساز صورت ہے:

(a) $\left\{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in W\right\}$　(b) $\left\{x \mid x = \frac{1}{2n+1}, n \in W\right\}$

(c) $\left\{x \mid x = \frac{1}{n+1}, n \in W\right\}$　(d) $\{x \mid x = 2n+1, n \in W\}$

(ii) اگر $A = \{\ \}$ ہو تو $P(A)$ برابر ہے:

(a) $\{\ \}$　(b) $\{1\}$　(c) $\{\{\ \}\}$　(d) ϕ

(iii) اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$، $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{3, 4, 5\}$ ہو تو $U - (A \cap B)$ برابر ہے:

(a) $\{1, 2, 4, 5\}$　(b) $\{2, 3\}$　(c) $\{1, 3, 4, 5\}$　(d) $\{1, 2, 3\}$

(iv) اگر A اور B متراکب سیٹ ہوں تو $n(A - B)$ برابر ہے:

(a) $n(A)$　(b) $n(B)$　(c) $A \cap B$　(d) $n(A) - n(A \cap B)$

(v) اگر $A \subseteq B$ اور $B - A \neq \phi$ ہو، تو $n(B - A)$ برابر ہے:

(a) 0　(b) $n(B)$　(c) $n(A)$　(d) $n(B) - n(A)$

(vi) اگر $n(A \cup B) = 50$، $n(A) = 30$ اور $n(B) = 35$ ہو تو $n(A \cap B)$ برابر ہے:

(a) 23　(b) 15　(c) 9　(d) 40

(vii) اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{x, y, z\}$ ہو تو سیٹ A اور B کے کارتیسی حاصل ضرب میں کل ________ ارکان ہیں۔

(a) 13　(b) 12　(c) 10　(d) 6

(viii) اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ہو تو $f(a + 1)$ کی قیمت ہے:

(a) $a + 1$　(b) $a^2 + 1$　(c) $a^2 + 2a + 1$　(d) $a^2 - a$

(ix) فرض کریں $f(x) = 3x+1$، اگر $f(x)=28$ ہو تو x کی قیمت معلوم کریں:

(a) 9　(b) 27　(c) 3　(d) 18

(x) فرض کریں $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{a, b\}$ دو غیر خالی سیٹ ہیں اور $f : A \rightarrow B$ ایک تفاعل ہے جس کو اس طرح بیان کیا گیا ہو: $f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$، تو درج ذیل میں سے کون سا انتخاب درست ہے؟

(a) f اِن جیکٹِو ہے　(b) f سر جیکٹِو ہے　(c) f بائی جیکٹِو ہے　(d) f صرف اِن ٹو ہے

2۔ درج ذیل کو اندراجی طریقے میں لکھیں۔

(i) $\{x \mid x = 2n, n \in N\}$　(ii) $\{x \mid x = 2m+1, m \in N\}$

(iii) $\{x \mid x = 11n, n \in W \wedge n < 11\}$　(iv) $\{x \mid x \in E \wedge 4 < x < 6\}$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(v) $\{x|x\in O\wedge 5<x<7\}$ (vi) $\{x|x\in Q\wedge x^2=2\}$

(vii) $\{x|x\in Q\wedge x=-x\}$ (viii) $\{x|\ x\in R\wedge x\notin Q'\}$

3۔ فرض کریں $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ ، $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$۔

درج ذیل ہر سیٹ کے ارکان کی فہرست بنائیں۔

(i) A' (ii) B' (iii) $A\cup B$ (iv) $A-B$

(v) $A\cap C$ (vi) $A'\cup C'$ (vii) $A'\cup C$ (viii) U'

4۔ وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے، اگر ضروری ہو تو درج ذیل کے برابر یک رکنی سیٹ معلوم کریں:

(i) A' (ii) $A\cap U$ (iii) $A\cup U$

(iv) $A\cup\phi$ (v) $\phi\cap\phi$

5۔ وین اشکال کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $A-B=A\cap B'$ (ii) $(A-B)'\cap B=B$

6۔ ذیل میں دیے گئے سیٹ A ، B اور C کے لیے خصوصیات کو ثابت کریں:

(i) یونین کی خاصیت تلازم (ii) تقاطع کی خاصیت تلازم

(iii) یونین کی تقاطع پر خاصیت تقسیمی (iv) تقاطع کی یونین پر خاصیت تقسیمی

(a) $A=\{1, 2, 3, 4\},\ B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ C=\{5, 6, 7, 9, 10\}$

(b) $A=\phi,\ B=\{0\},\ C=\{0, 1, 2\}$

(c) $A=N,\ B=Z,\ C=Q$

7۔ درج ذیل سیٹوں کے لیے ڈی مورگن کے قوانین کو ثابت کریں:

$U=\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, $A=\{2, 4, 6, \ldots, 20\}$ اور $B=\{1, 3, 5, \ldots, 19\}$

8۔ فرض کریں $P=\{x|\ x=5m,\ m\in N\}$ اور $Q=\{x|\ x=2m,\ m\in N\}$ ہے۔ $P\cap Q$ معلوم کریں۔

9۔ یونین اور تقاطع کی مناسب خصوصیات کی مدد سے، درج ذیل نتائج اخذ کریں:

(i) $A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)$ (ii) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$

10۔ اگر $g(x)=7x-2$ اور $s(x)=8x^2-3$ ہو تو معلوم کریں۔

(i) $g(0)$ (ii) $g(-1)$ (iii) $g\left(-\frac{5}{3}\right)$ (iv) $s(1)$ (v) $s(-9)$ (vi) $s\left(\frac{7}{2}\right)$

11۔ فرض کریں $f(x)=ax+b$ ، جب کہ a اور b مستقل اعداد ہیں۔ اگر $f(-2)=3$ اور $f(4)=10$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

12۔ فرض کریں $k(x)=7x-5$ اگر $k(x)=100$ ہو تو x کی قیمت معلوم کریں۔

13۔ فرض کریں $g(x)=mx^2+n$ ، جب کہ m اور n مستقل اعداد ہیں۔ اگر $g(4)=20$ اور $g(0)=5$ ہو تو m اور n کی قیمتیں معلوم کریں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

14۔ ایک شاپنگ مال میں 1 سے 100 کے لیبل والی مختلف اقسام کے 100 اشیا ہیں، جو یونیورسل سیٹ U کو ظاہر کرتے ہیں۔ اشیا کی درجہ بندی درج ذیل ہے:

- سیٹ A: الیکٹرانکس، 1 سے 30 تک کے لیبل والی 30 اشیا پر مشتمل ہے۔
- سیٹ B: کپڑوں میں 31 سے 55 تک کے لیبل والی 25 اشیا شامل ہیں۔
- سیٹ C: سنگھار کی اشیا، جس میں 76 سے 100 تک کے لیبل والی 25 اشیا شامل ہیں۔
- ہر سیٹ کو اندراجی طریقہ میں لکھیں اور تینوں سیٹوں کا یونین معلوم کریں۔

15۔ سالانہ امتحان میں شامل ہونے والے 180 طلبہ میں سے 120 نے ریاضی کا امتحان پاس کیا، 90 نے سائنس کا امتحان پاس کیا اور 60 نے ریاضی اور سائنس دونوں ٹیسٹ پاس کیے۔

(a) کتنے طلبہ نے ریاضی یا سائنس کا امتحان پاس کیا؟
(b) کتنے طلبہ نے دونوں ٹیسٹوں میں سے کوئی بھی پاس نہیں کیا؟
(c) کتنے طلبہ نے سائنس کا امتحان پاس کیا لیکن ریاضی کا امتحان نہیں؟
(d) سائنس کے امتحان میں کتنے طلبہ فیل ہوئے؟

16۔ ایک شہر کے سافٹ ویئر ہاؤس میں، جہاں 300 سافٹ ویئر ڈویلپرز کام کرتے ہیں، ایک سروے کیا گیا تاکہ یہ معلوم کیا جا سکے کہ کون سی پروگرامنگ زبانیں زیادہ پسند کی جاتی ہیں۔ سروے کے نتائج درج ذیل ہیں:

- 150 ڈویلپرز کو پائتھن پسند ہے۔
- 130 ڈویلپرز کو جاوا پسند ہے۔
- 120 ڈویلپرز کو PHP پسند ہے۔
- 70 ڈویلپرز کو پائتھن اور جاوا دونوں پسند ہیں۔
- 60 ڈویلپرز کو پائتھن اور PHP دونوں پسند ہیں۔
- 50 ڈویلپرز کو جاوا اور PHP دونوں پسند ہیں۔
- 40 ڈویلپرز کو تینوں زبانیں پسند ہیں: پائتھن، جاوا اور PHP۔

(a) کتنے ڈویلپرز ان زبانوں میں سے کم از کم ایک استعمال کرتے ہیں؟
(b) کتنے ڈویلپرز صرف ایک زبان استعمال کرتے ہیں؟
(c) کتنے ڈویلپرز ان میں سے کوئی بھی زبان استعمال نہیں کرتے؟
(d) کتنے ڈویلپرز صرف PHP استعمال کرتے ہیں؟

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

یونٹ 4

تجزی اور الجبری مہارت
(Factorization and Algebraic Manipulation)

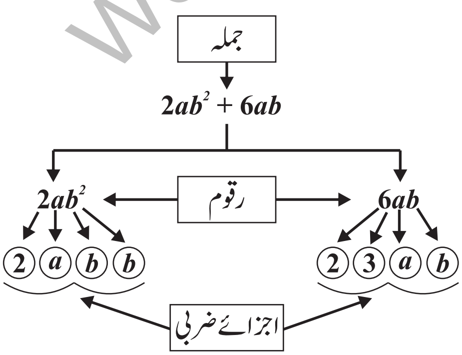
اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- مشترک اجزائے ضربی اور سہ رقمی جملوں کو ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے اظہار کر سکیں۔
- دو درجی اور سہ درجی الجبری جملوں کی تجزی کر سکیں:
  - $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + b^4$
  - $x^2 + px + q$
  - $ax^2 + bx + c$
  - $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$
  - $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$
  - $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$
  - $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  - $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
  - $a^3 \pm b^3$
- الجبری جملوں کا عادِ اعظم اور ذو اضعافِ اقل معلوم کر سکیں اور عادِ اعظم اور ذو اضعافِ اقل کے درمیان تعلق معلوم کر سکیں۔
- الجبری جملوں کا جذر بذریعہ تجزی اور تقسیم معلوم کر سکیں۔
- دو درجی اور سہ درجی الجبری جملوں کی تجزی کے تصورات کو روزمرہ زندگی کے مسائل (جیسے انجینئرنگ، فزکس اور فنانس) پر لاگو کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

الجبری تجزی صرف کمرہ جماعت تک محدود ریاضیاتی مہارت نہیں ہے بلکہ یہ روزمرہ زندگی کے مسائل کو حل کرنے میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔ پیچیدہ الجبری جملوں کو آسان عوامل میں توڑ کر، ہم حساب کتاب کو زیادہ قابلِ فہم بنا سکتے ہیں اور اہم چیزیں معلوم کر سکتے ہیں۔ الجبری تجزی کا فنانس، انجینئرنگ سائنس، کاروبار اور روزمرہ کی زندگی میں عملی اطلاق ہوتا ہے۔ یہ یونٹ الجبری جملوں کی مہارتوں کو دریافت کرے گا اور یہ ظاہر کرے گا کہ ان طریقوں کو حقیقی دنیا میں کیسے لاگو کیا جا سکتا ہے جس سے ریاضی کو زندگی کے مختلف پہلوؤں میں ایک قیمتی اثاثہ بنایا جا سکتا ہے۔

4.1 مشترک اجزائے ضربی اور سہ رقمی جملوں کا ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے اظہار
(Identifying Common Factors and Trinomials Concretely, Pictorially and Symbolically)



4.1.1 مشترک جزو ضربی (Common Factors)

الجبرا میں مشترک جزو ضربی ایک ایسا جملہ ہوتا ہے جو دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

مثال کے طور پر $2x - 6 = 2(x - 3)$

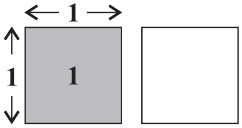
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یہاں 2 مشترک جزوضربی ہے جو $2x$ اور 6 دونوں پر پورا پورا تقسیم ہوتا ہے۔

سہ رقمی جملوں کو ٹھوس طریقے سے ظاہر کرنے کے لیے ہم یونٹ ٹائلوں، مستطیلی ٹائلوں اور مربعی ٹائلوں کو مستطیل میں ترتیب دیتے ہیں۔ سہ رقمی جملوں کے اجزائے ضربی کو مستطیل کے اطراف کی لمبائیوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

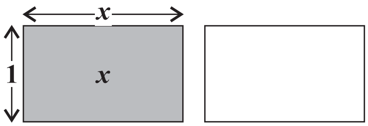
یونٹ ٹائلیں (Unit Tiles)



یہاں ایک سُرمئی یونٹ ٹائل 1 کو ظاہر کرتی ہے اور ایک سفید یونٹ ٹائل 1- کو ظاہر کرتی ہے۔

سُرمئی اور سفید دونوں یونٹ ٹائلیں ایک صفر جوڑا بناتی ہیں۔

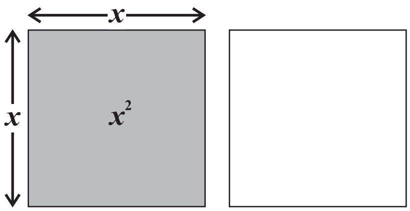
مستطیلی ٹائلیں (Rectangular Tiles)



سُرمئی مستطیلی ٹائل کو x سے اور سفید مستطیلی ٹائل کو $-x$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

سُرمئی اور سفید دونوں مستطیلی ٹائلیں بھی ایک صفر جوڑا بناتی ہیں۔

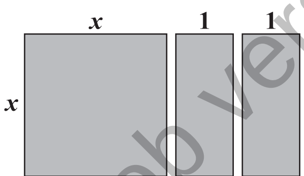
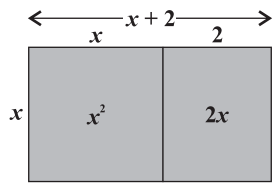
مربعی ٹائلیں (Squared Tiles)



سُرمئی مربعی ٹائل ہر طرف x اکائیوں کی پیائش کرتی ہے اور اس کا رقبہ $x \times x = x^2$ اکائیاں ہے۔ اس ٹائل کو x^2 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سفید مربعی ٹائل کو $-x^2$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سُرمئی اور سفید دونوں مربعی ٹائلیں ایک صفر جوڑا بناتی ہیں۔

مثال 1: $x^2 + 2x$ کے مشترک جزوضربی ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے معلوم کریں۔

حل: ہم ایک x^2 ٹائل اور دو x ٹائلوں کو مستطیل میں ترتیب دیتے ہیں۔

ٹھوس طریقے سے	تصویری طریقے سے	علامتی طریقے سے
		$x^2 + 2x = x(x + 2)$

4.1.2 سہ رقمی جملوں کے اجزائے ضربی (Trinomial Factoring)

کسی سہ رقمی جملے کو دو دو رقمی جملوں کے حاصل ضرب کے طور پر لکھنے کو سہ رقمی جملے کے اجزائے ضربی کہا جاتا ہے۔ سہ رقمی ایک ایسا جملہ ہوتا ہے جس کی تین رقمیں ہوتی ہیں اور دو رقمی ایسا جملہ ہوتا ہے جس کی دو رقمیں ہوتی ہیں۔

مثال کے طور پر $x^2 + 4x + 4$ اور $3x^2 - x - 2$ سہ رقمی جملے ہیں جب کہ $x + 2$ اور $3x - 1$ دو رقمی جملے ہیں۔

سرگرمی

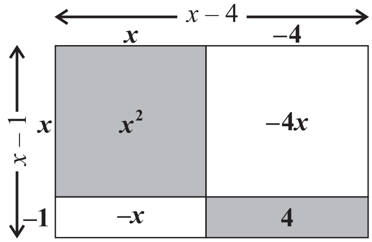
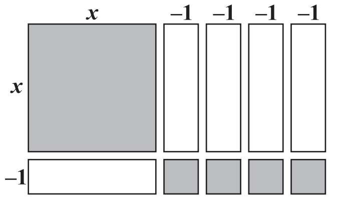
طلبہ کو گروہوں میں تقسیم کریں۔ کچھ سہ رقمی جملے اور مختلف رنگوں کے چارٹ پیپرز سے بنی ہوئی مختلف جسامت کی الجبری ٹائلیں طلبہ میں تقسیم کریں۔ طلبہ سے کہیں کہ دیے گئے جملوں کی تجزی ٹھوس طریقے سے کریں۔

Web version of PCTB textbook

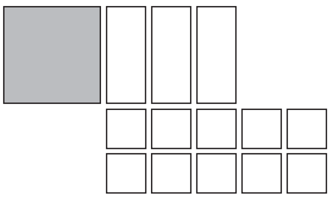
NOT FOR SALE-PESRP

مثال 2: $x^2 - 5x + 4$ کی تجزی ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے کریں۔

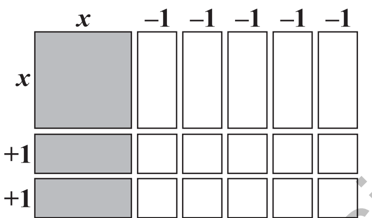
حل:

علامتی طریقے سے	تصویری طریقے سے	ٹھوس طریقے سے
$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$		ہم ایک x^2 ٹائل، پانچ $x-$ٹائلوں اور چار یونٹ ٹائلوں کو ایک مستطیل میں ترتیب دیتے ہیں۔ 

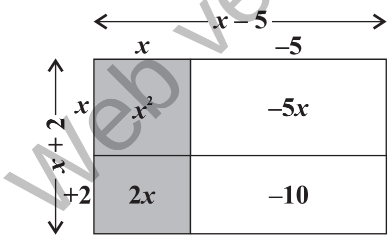
مثال 3: $x^2 - 3x - 10$ کی تجزی ٹھوس، تصویری اور علامتی طریقے سے کریں۔



حل: ہم ایک x^2 ٹائل، تین $x-$ٹائلوں اور دس $1-$ ٹائلوں کو ایک مستطیل میں ترتیب دیتے ہیں۔



ہم دیکھتے ہیں کہ ایک بڑی مستطیل بنانے کے لیے چھوٹی مستطیل ٹائلیں کافی نہیں ہیں۔ اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے ہم صفر جوڑا شامل کرتے ہیں۔ دو x ٹائلیں اور دو $x-$ ٹائلیں شامل کرنے سے دیئے گئے جملے میں کوئی تبدیلی نہیں آتی کیوں کہ $2x - 2x = 0$

علامتی طریقے سے	تصویری طریقے سے
$x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$	

4.1.3 دو درجی اور سہ درجی الجبری جملوں کی تجزی

(Factorizing Quadratic and Cubic Algebraic Expressions)

پہلی قسم $x^2 + px + q$ اور $ax^2 + bx + c$ کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

درج بالا قسم کے جملوں کی تجزی کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت درج ذیل مثالوں میں کی گئی ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال4: $x^2 + 9x + 14$ کی تجزی کیجیے۔

حل: 2+اور 7+ایسے دو اعداد ہیں جن کا مجموعہ 9+ اور حاصل ضرب 14+ہے۔

اجزائے ضربی کا مجموعہ	اجزائے ضربی کی حاصل ضرب
$14 + 1 = 15$ $7 + 2 = 9$	$14 \times 1 = 14$ $7 \times 2 = 14$

$$x^2 + 9x + 14$$
$$= x^2 + 2x + 7x + 14$$
$$= x(x + 2) + 7(x + 2)$$
$$= (x + 2)(x + 7)$$

مثال5: $x^2 - 11x + 24$ کی تجزی کیجیے۔

حل: 8–اور 3–ایسے دو اعداد ہیں جن کا مجموعہ 11–اور حاصل ضرب 24+ہے۔

پس،

اجزائے ضربی کا مجموعہ	اجزائے ضربی کی حاصل ضرب
$24 + 1 = 25$	$24 \times 1 = 24$
$8 + 3 = 11$	$8 \times 3 = 24$
$-8 - 3 = -11$	$(-8) \times (-3) = 24$
$6 + 4 = 10$	$6 \times 4 = 24$
$12 + 2 = 14$	$12 \times 2 = 24$

$$x^2 - 11x + 24$$
$$= x^2 - 8x - 3x + 24$$
$$= x(x - 8) - 3(x - 8)$$
$$= (x - 8)(x - 3)$$

مثال6: $p^2 + 11p + 18$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$p^2 + 11p + 18$$
$$= p^2 + 9p + 2p + 18 \qquad \because\ 9 + 2 = 11,\ 9 \times 2 = 18$$
$$= p(p + 9) + 2(p + 9)$$
$$= (p + 9)(p + 2)$$

اوپر جن دو درجی سہ رقمی جملوں کی تجزی کی گئی ہے ان میں x^2 کا عددی سر 1 تھا۔ اب ہم ایسی مثالوں کی وضاحت کریں گے جن میں x^2 کا عددی سر 1 نہ ہو۔

مثال7: $2x^2 + 17x + 26$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

پہلا قدم: مستقل رقم اور x^2 کے عددی سر کو ضرب دیں۔

$$2 \times 26 = 52$$

> **یاد رکھیے!**
> ایسا جملہ جس کا درجہ 2 ہو اس کو دو درجی جملہ کہتے ہیں۔

دوسرا قدم: 52 کے تمام اجزائے ضربی معلوم کریں۔

$1, 52$	$-1, -52$
$2, 26$	$-2, -26$
$-4, -13$	$4, 13$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

تیسرا قدم: عادوں کا مجموعہ معلوم کریں جو درمیانی رقم (17) کے برابر ہو۔

$1 + 52 = 53$	$-1 - 52 = -53$
$2 + 26 = 28$	$-2 - 26 = -28$
$4 + 13 = 17$	$-4 - 13 = -17$

چوتھا قدم: دیے گئے جملے میں درمیانی رقم کو تبدیل کریں۔

$$2x^2 + 17x + 26$$
$$= 2x^2 + 4x + 13x + 26$$

پانچواں قدم: پہلی دو اور آخری دو رقموں میں سے مشترک لیں۔

$$= 2x(x + 2) + 13(x + 2)$$

چھٹا قدم: دوبارہ دونوں رقموں میں سے مشترک لیں۔

$$= (x + 2)(2x + 13)$$

خود آزمائی!

درج ذیل جملوں کی تجزی کریں۔

(i) $x^2 + 7x - 18$
(ii) $t^2 - 5t - 24$
(iii) $6y^2 - y - 12$

مثال 8: $3x^2 - 4x - 4$ کی تجزی کیجیے۔

حل: $3x^2 - 4x - 4$

$$= 3x^2 + 2x - 6x - 4 \qquad \because\ 2 \times (-6) = -12,\ +2 - 6 = -4$$
$$= x(3x + 2) - 2(3x + 2)$$
$$= (3x + 2)(x - 2)$$

مشق 4.1

1۔ مشترک جزو ضربی کی شناخت کر کے تجزی کریں۔

(i) $6x + 12$ (ii) $15y^2 + 20y$ (iii) $-12x^2 - 3x$
(iv) $4a^2b + 8ab^2$ (v) $xy - 3x^2 + 2x$ (vi) $3a^2b - 9ab^2 + 15ab$

2۔ تجزی کریں۔

(i) $5x + 15$ (ii) $x^2 + 4x + 3$ (iii) $x^2 + 6x + 8$
(iv) $x^2 + 4x + 4$

3۔ تجزی کریں۔

(i) $x^2 + x - 12$ (ii) $x^2 + 7x + 10$ (iii) $x^2 - 6x + 8$
(iv) $x^2 - x - 56$ (v) $x^2 - 10x - 24$ (vi) $y^2 + 4y - 12$
(vii) $y^2 + 13y + 36$ (viii) $x^2 - x - 2$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

4۔ تجزی کریں۔

(i) $2x^2 + 7x + 3$ (ii) $2x^2 + 11x + 15$ (iii) $4x^2 + 13x + 3$

(iv) $3x^2 + 5x + 2$ (v) $3y^2 - 11y + 6$ (vi) $2y^2 - 5y + 2$

(vii) $4z^2 - 11z + 6$ (viii) $6 + 7x - 3x^2$

دوسری قسم: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ یا $a^4 + b^4$ کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

آیئے پہلے جملے $a^4 + a^2b^2 + b^4$ کی تجزی کرتے ہیں۔

$$a^4 + a^2b^2 + b^4$$
$$= a^4 + b^4 + a^2b^2$$
$$= (a^2)^2 + (b^2)^2 + a^2b^2$$
$$= (a^2)^2 + (b^2)^2 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 + a^2b^2$$ ($2a^2b^2$ کو جمع اور تفریق کرنے سے)
$$= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$
$$= (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$$
$$= (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

یاد رکھیے!

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال 9: $x^4 + x^2 + 25$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$x^4 + x^2 + 25$$
$$= x^4 + 25 + x^2$$
$$= (x^2)^2 + (5)^2 + 2(x^2)(5) - 2(x^2)(5) + x^2$$ ($2(x^2)(5)$ کو جمع اور تفریق کرنے سے)
$$= (x^2 + 5)^2 - 10x^2 + x^2$$
$$= (x^2 + 5)^2 - 9x^2$$
$$= (x^2 + 5)^2 - (3x)^2$$
$$= (x^2 + 5 - 3x)(x^2 + 5 + 3x)$$
$$= (x^2 - 3x + 5)(x^2 + 3x + 5)$$

سرگرمی

- مختلف جملے لکھ کر کارڈز تیار کریں۔
- طلبہ کو چھوٹے گروہوں میں تقسیم کریں۔
- ہر گروہ کارڈ اٹھائے گا اور لکھے گئے جملے کی تجزی کرے گا۔
- جو گروہ مقررہ وقت میں سب سے زیادہ جملوں کی درست تجزی مکمل کرے گا وہ جیت جائے گا۔

مثال 10: $x^4 + y^4$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$x^4 + y^4$$
$$= (x^2)^2 + (y^2)^2$$
$$= (x^2)^2 + (y^2)^2 + 2(x^2)(y^2) - 2(x^2)(y^2)$$ ($2x^2y^2$ کو جمع اور تفریق کرنے سے)
$$= (x^2 + y^2)^2 - (\sqrt{2}xy)^2$$
$$= (x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)$$
$$= (x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)(x^2 + \sqrt{2}xy + y^2)$$

خود آزمائی!

تجزی کریں۔

(i) $64x^4y^4 + z^4$

(ii) $81x^4 + \frac{1}{81x^4} - 11$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 11: $a^4 + 64$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$a^4 + 64$$
$$= (a^2)^2 + (8)^2$$
$$= (a^2)^2 + (8)^2 + 2(a^2)(8) - 2(a^2)(8)$$ ($2(a^2)(8)$ کو جمع اور تفریق کرنے سے)
$$= (a^2 + 8)^2 - 16a^2$$
$$= (a^2 + 8)^2 - (4a)^2$$
$$= (a^2 + 8 - 4a)(a^2 + 8 + 4a)$$
$$= (a^2 - 4a + 8)(a^2 + 4a + 8)$$

تیسری قسم: درج ذیل قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

- $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں:

مثال 12: $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3$$
$$= (y + 4)(y + 6) - 3$$ فرض کریں کہ $y = x^2 + 5x$
$$= y^2 + 6y + 4y + 24 - 3$$
$$= y^2 + 10y + 21$$
$$= y^2 + 7y + 3y + 21$$
$$= y(y + 7) + 3(y + 7)$$
$$= (y + 7)(y + 3)$$
$$= (x^2 + 5x + 7)(x^2 + 5x + 3)$$ $(\because\ y = x^2 + 5x)$

مثال 13: $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 15$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 15$$

دیے گئے جملے کو دوبارہ ترتیب سے لکھیں کیوں کہ $2 + 5 = 3 + 4$

$$[(x + 2)(x + 5)][(x + 3)(x + 4)] - 15$$
$$= (x^2 + 5x + 2x + 10)(x^2 + 4x + 3x + 12) - 15$$
$$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 15$$
$$= (y + 10)(y + 12) - 15$$ فرض کریں کہ $y = x^2 + 7x$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

$= y^2 + 12y + 10y + 120 - 15$
$= y^2 + 22y + 105$
$= y^2 + 15y + 7y + 105$
$= y(y + 15) + 7(y + 15)$
$= (y + 15)(y + 7)$
$(\because y = x^2 + 7x) \quad = (x^2 + 7x + 15)(x^2 + 7x + 7)$

مثال 14: $(x - 2)(x + 2)(x + 1)(x - 4) + 2x^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل: $(x - 2)(x + 2)(x + 1)(x - 4) + 2x^2$

$[\because (-2) \times 2 = 1 \times (-4)] \quad = [(x - 2)(x + 2)][(x + 1)(x - 4)] + 2x^2$
$= (x^2 - 2^2)(x^2 - 4x + x - 4) + 2x^2$
$= (x^2 - 4)(x^2 - 3x - 4) + 2x^2$
فرض کریں کہ $y = x^2 - 4$ $\quad = y(y - 3x) + 2x^2$
$= y^2 - 3xy + 2x^2$
$= y^2 - 2xy - xy + 2x^2$
$= y(y - 2x) - x(y - 2x)$
$= (y - 2x)(y - x)$
$(\because y = x^2 - 4) \quad = (x^2 - 4 - 2x)(x^2 - 4 - x)$
$= (x^2 - 2x - 4)(x^2 - x - 4)$

چوتھی قسم: درج ذیل قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

اس قسم کے جملوں کی تجزی کی وضاحت درج ذیل مثالوں میں کی گئی ہے۔

یاد رکھیے!
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

مثال 15: $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$ کی تجزی کیجیے۔

حل: $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$
$= (2x)^3 + 3(2x)^2(5) + 3(2x)(5)^2 + (5)^3$
$= (2x + 5)^3$
$= (2x + 5)(2x + 5)(2x + 5)$

مثال 16: $x^3 - 18x^2 + 108x - 216$ کی تجزی کیجیے۔

حل: $x^3 - 18x^2 + 108x - 216$
$= (x)^3 - 3(x)^2(6) + 3(x)(6)^2 - (6)^3$
$= (x - 6)^3$
$= (x - 6)(x - 6)(x - 6)$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

پانچویں قسم: $a^3 \pm b^3$ قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

جملہ $a^3 + b^3$ دو مکعبوں کا مجموعہ ہے اور اس کی تجزی درج ذیل طریقے سے کی جاسکتی ہے:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

جملہ $a^3 - b^3$ دو مکعبوں کا فرق ہے اور اس کی تجزی درج ذیل طریقے سے کی جاسکتی ہے:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثال17: $8x^3 + 27$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned} &8x^3 + 27 \\ &= (2x)^3 + (3)^3 \\ &= (2x + 3)[(2x)^2 - (2x)(3) + (3)^2] \\ &= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) \end{aligned}$$

کیا آپ جانتے ہیں؟

$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
$(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$
$(a + b)^3 \neq a^3 + b^3$
$(a - b)^3 \neq a^3 - b^3$

مثال18: $x^3 - 27y^3$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned} &x^3 - 27y^3 \\ &= (x)^3 - (3y)^3 \\ &= (x - 3y)[(x)^2 + (x)(3y) + (3y)^2] \\ &= (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2) \end{aligned}$$

مشق 4.2

1۔ درج ذیل جملوں کی تجزی کریں:

(i) $4x^4 + 81y^4$ (ii) $a^4 + 64b^4$ (iii) $x^4 + 4x^2 + 16$
(iv) $x^4 - 14x^2 + 1$ (v) $x^4 - 30x^2y^2 + 9y^4$ (vi) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$

2۔ درج ذیل جملوں کی تجزی کریں:

(i) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$ (ii) $(x + 2)(x - 7)(x - 4)(x - 1) + 17$
(iii) $(2x^2 + 7x + 3)(2x^2 + 7x + 5) + 1$ (iv) $(3x^2 + 5x + 3)(3x^2 + 5x + 5) - 3$
(v) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) - 3x^2$ (vi) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) - 16x^2$

3۔ تجزی کریں:

(i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$
(iii) $x^3 + 18x^2y + 108xy^2 + 216y^3$ (iv) $8x^3 - 125y^3 + 150xy^2 - 60x^2y$

4۔ تجزی کریں:

(i) $125a^3 - 1$ (ii) $64x^3 + 125$ (iii) $x^6 - 27$
(iv) $1000a^3 + 1$ (v) $343x^3 + 216$ (vi) $27 - 512y^3$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

4.2 الجبری جملوں کا عاداعظم (HCF) اور ذواضعاف اقل (LCM)
(Highest Common Factor (HCF) and Least Common Multiple (LCM) of Algebraic Expressions)

4.2.1 عاداعظم (Highest Common Factor (HCF))

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاداعظم سب سے بڑا الجبری جملہ ہوتا ہے جو ان کو بغیر کچھ باقی چھوڑے تقسیم کرتا ہے۔ ہم درج ذیل دو طریقوں سے دیئے گئے جملوں کا عاداعظم معلوم کر سکتے ہیں:

(a) بذریعہ تجزی　　　(b) بذریعہ تقسیم

(a) عاداعظم بذریعہ تجزی معلوم کرنا

مثال 19: $6x^2y,\ 9xy^2$ کا عاداعظم معلوم کریں۔

حل:

$6x^2y = 2 \times 3 \times x \times x \times y$

$9xy^2 = 3 \times 3 \times x \times y \times y$

عاداعظم $= 3 \times x \times y$　　(مشترک عادوں کا حاصل ضرب)

$= 3xy$

مثال 20: کثیر رقمی جملوں $x^3 - 27,\ x^2 + 6x - 27,\ x^2 - 9$ کا عاداعظم بذریعہ تجزی معلوم کریں۔

حل:

$x^3 - 27 = x^3 - 3^3$

$= (x-3)[(x)^2 + (x)(3) + (3)^2]$

$= (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

$x^2 + 6x - 27 = x^2 + 9x - 3x - 27$

$= x(x+9) - 3(x+9)$

$= (x+9)(x-3)$

$x^2 - 9 = x^2 - 3^2$

$= (x-3)(x+3)$

عاداعظم $= x - 3$

(b) عاداعظم بذریعہ تقسیم معلوم کرنا

مثال 21: کثیر رقمی جملوں $6x^3 - 17x^2 - 5x + 6$ اور $6x^3 - 5x^2 - 3x + 2$ کا عاداعظم بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ 6x^3 - 17x^2 - 5x + 6 & 6x^3 - 5x^2 - 3x + 2 \\ & \underline{\underset{-}{6x^3} \underset{+}{\mp} 17x^2 \underset{+}{\mp} 5x \underset{-}{\pm} 6} \\ & 12x^2 + 2x - 4 \end{array}$$

یہاں $12x^2 + 2x - 4 = 2(6x^2 + x - 2)$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

2 دیے گئے دونوں جملوں میں مشترک نہیں ہے اس لیے ہم اسے نظر انداز کرتے ہیں اور صرف $6x^2 + x - 2$ کو لیتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & x - 3 \\ 6x^2 + x - 2 & 6x^3 - 17x^2 - 5x + 6 \\ & \underline{\underset{-}{}6x^3 \underset{-}{+} x^2 \underset{+}{-} 2x} \\ & -18x^2 - 3x + 6 \\ & \underline{\underset{+}{-}18x^2 \underset{+}{-} 3x \underset{-}{+} 6} \\ & 0 \end{array}$$

پس $6x^2 + x - 2 =$ عاداعظم

4.2.2 ذواضعاف اقل (Least Common Multiple (LCM))

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل سب سے چھوٹا الجبری جملہ ہوتا ہے جو دیے گئے دونوں جملوں پر قابل تقسیم ہوتا ہے۔

ذواضعاف اقل بذریعہ تجزی معلوم کرنے کے لیے ہم درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں:

غیر مشترک اجزائے ضربی × مشترک اجزائے ضربی = ذواضعاف اقل

مثال 22: $4x^2y,\ 8x^3y^2$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

$4x^2y = 2 \times 2 \times x \times x \times y$

$8x^3y^2 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x \times y \times y$

مشترک اجزائے ضربی $= 2 \times 2 \times x \times x \times y = 4x^2y$

غیر مشترک اجزائے ضربی $= 2 \times x \times y = 2xy$

غیر مشترک اجزائے ضربی × مشترک اجزائے ضربی = ذواضعاف اقل

$= 4x^2y \times 2xy = 8x^3y^2$

مثال 23: کثیر رقتی جملوں $x^2 - 3x + 2$، $x^2 - 1$ اور $x^2 - 5x + 4$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل: جیسا کہ

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$

$= x(x - 2) - 1(x - 2)$

$= (x - 2)(x - 1)$

اور $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$x^2 - 5x + 4 = x^2 - 4x - x + 4$

$= x(x - 4) - 1(x - 4)$

$= (x - 4)(x - 1)$

مشترک اجزائے ضربی $= x - 1$

غیر مشترک اجزائے ضربی $= (x + 1)(x - 2)(x - 4)$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

غیر مشترک اجزائے ضربی × مشترک اجزائے ضربی = ذواضعاف اقل

$= (x-1) \times (x+1)(x-2)\,(x-4)$

ذواضعاف اقل $= (x-1)(x+1)(x-2)\,(x-4)$

4.2.3 عاداعظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان تعلق (Relationship Between LCM and HCF)

عاداعظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان تعلق کو اس طرح سے ظاہر کیا جاتا ہے:

ذواضعاف اقل × عاداعظم $= p(x) \times q(x)$

یہاں پہلا کثیر رقمی جملہ $= p(x)$

دوسرا کثیر رقمی جملہ $= q(x)$

مثال 24: دو کثیر رقمی جملوں کا ذواضعاف اقل اور عاداعظم بالترتیب $x^3 - 10x^2 + 11x + 70$ اور $x - 7$ ہے۔ اگر ایک کثیر رقمی جملہ $x^2 - 12x + 35$ ہو تو دوسرا کثیر رقمی جملہ معلوم کریں۔

حل: ذوضاف اقل $= x^3 - 10x^2 + 11x + 70$

عاداعظم $= x - 7$

$p(x) = x^2 - 12x + 35$

$q(x) = ?$

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ

$$q(x) = \frac{\text{عادِاعظم} \times \text{ذواضعاف اقل}}{p(x)}$$

$$= \frac{(x^3 - 10x^2 + 11x + 70)(x-7)}{x^2 - 12x + 35}$$

$$\begin{array}{r|l} & x + 2 \\ \hline x^2 - 12x + 35 & x^3 - 10x^2 + 11x + 70 \\ & \underline{-x^3 \mp 12x^2 \pm 35x} \\ & 2x^2 - 24x + 70 \\ & \underline{-2x^2 \mp 24x \pm 70} \\ & 0 \end{array}$$

پس $q(x) = (x+2)(x-7)$

$= x^2 - 7x + 2x - 14$

$= x^2 - 5x - 14$

مثال 25: دو کثیر رقمی جملوں $x^2y + xy^2$ اور $x^2 + xy$ کا ذواضعاف اقل $xy\,(x+y)$ ہے۔ ان کا عاداعظم معلوم کریں۔

حل: ذواضعاف اقل $= xy(x+y)$

عاداعظم $= ?$

پہلا کثیر رقمی جملہ $= x^2y + xy^2$

دوسرا کثیر رقمی جملہ $= x^2 + xy$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ عادا عظم × ذواضعاف اقل = دو کثیر رقمی جملوں کا حاصل ضرب

$$\text{عادا عظم} = \frac{\text{دو کثیر رقمی جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذواضعاف اقل}}$$

$$= \frac{(x^2y + xy^2)(x^2 + xy)}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{xy(x+y)x(x+y)}{xy(x+y)}$$

$$= x(x+y)$$

مشق 4.3

1۔ عادا عظم بذریعہ تجزی معلوم کریں۔

(i) $21x^2y,\ 35xy^2$ (ii) $4x^2 - 9y^2,\ 2x^2 - 3xy$

(iii) $x^3 - 1,\ x^2 + x + 1$ (iv) $a^3 + 2a^2 - 3a,\ 2a^3 + 5a^2 - 3a$

(v) $t^2 - 3t - 4,\ t^2 + 5t + 4,\ t^2 - 1$ (vi) $x^2 + 15x + 56,\ x^2 + 5x - 24,\ x^2 + 8x$

2۔ درج ذیل جملوں کا عادا عظم بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

(i) $27x^3 + 9x^2 - 3x - 10,\ 3x - 2$ (ii) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15,\ x^2 - 4x + 3$

(iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\ 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$

(iv) $2x^3 - 4x^2 - 16x,\ x^3 - 4x,\ 3x^2 - 6x$

3۔ درج ذیل جملوں کا ذواضعاف اقل بذریعہ تجزی معلوم کریں۔

(i) $2a^2b,\ 4ab^2,\ 6ab$ (ii) $x^2 + x,\ x^3 + x^2$

(iii) $a^2 - 4a + 4,\ a^2 - 2a$ (iv) $x^4 - 16,\ x^3 - 4x$

(v) $16 - 4x^2,\ x^2 + x - 6,\ 4 - x^2$

4۔ دو کثیر رقمی جملوں کا عادا عظم $y - 7$ اور ذواضعاف اقل $y^3 - 10y^2 + 11y + 70$ ہے۔ اگر ایک کثیر رقمی جملہ $y^2 - 5y - 14$ ہو تو دوسرا کثیر رقمی جملہ معلوم کریں۔

5۔ دو کثیر رقمی جملوں $p(x)$ اور $q(x)$ کا ذواضعاف اقل اور عادا عظم بالترتیب $36x^3(x + a)(x^3 - a^3)$ اور $x^2(x - a)$ ہے۔ اگر $p(x) = 4x^2(x^2 - a^2)$ ہو تو $q(x)$ معلوم کریں۔

6۔ دو کثیر رقمی جملوں کا عادا عظم اور ذواضعاف اقل بالترتیب $(x + a)$ اور $12x^2(x + a)(x^2 - a^2)$ ہو تو دونوں جملوں کی حاصل ضرب معلوم کریں۔

4.3 الجبری جملوں کا جذرالمربع (Square Root of an Algebraic Expression)

الجبری جملہ کے جذرالمربع سے مراد ایک ایسی قدر ہے جسے خود سے ضرب کرنے سے اصل جملہ حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرح جیسے کسی عدد کا جذرالمربع معلوم کیا جاتا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

مثال کے طور پر $4a^2$ کا جذرالمربع $\pm 2a$ ہے کیوں کہ $2a \times 2a = 4a^2$ اور $(-2a) \times (-2a) = 4a^2$

الجبری جملے کا جذرالمربع معلوم کرنے کے درج ذیل دو طریقے ہیں:

(a) بذریعہ تجزی (b) بذریعہ تقسیم

(a) جذرالمربع بذریعہ تجزی

مثال26: $36x^4 - 36x^2 + 9$ کا جذرالمربع معلوم کریں۔

حل:

$$36x^4 - 36x^2 + 9 = 9(4x^4 - 4x^2 + 1)$$
$$= 9[(2x^2)^2 - 2(2x^2)(1) + (1)^2]$$
$$= 3^2(2x^2 - 1)^2$$

طرفین کا جذرالمربع لینے سے

$$\sqrt{36x^4 - 36x^2 + 9} = \sqrt{3^2(2x^2 - 1)^2}$$
$$= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{(2x^2 - 1)^2}$$
$$= \pm 3(2x^2 - 1)$$

(b) جذرالمربع بذریعہ تقسیم

جب کثیر رقمی جملے کا درجہ زیادہ ہو تب تقسیم کے طریقہ سے جذرالمربع معلوم کرنا بہت مفید ہوتا ہے۔

مثال27: $x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9$ کا جذرالمربع معلوم کریں۔

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 6x + 3 \\ \hline x^2 & x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9 \\ & \underline{-x^4} \\ 2x^2 - 6x & -12x^3 + 42x^2 \\ & \underline{\mp 12x^3 \pm 36x^2} \\ 2x^2 - 12x + 3 & 6x^2 - 36x + 9 \\ & \underline{-6x^2 \mp 36x \pm 9} \\ & 0 \end{array}$$

حل: x^2 کو x^2 سے ضرب دینے سے x^4 حاصل ہوتا ہے۔

حاصل تقسیم (x^2) کو 2 سے ضرب دینے سے $2x^2$ حاصل ہوتا ہے۔ اور $2x^2$ کو $-12x^3$ سے تقسیم کرنے سے $-6x$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح جاری رکھنے سے ہم باقی حاصل کرتے ہیں۔

پس $x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9$ کا جذرالمربع $\pm(x^2 - 6x + 3)$ ہے۔

4.3.1 تجزی سے متعلق حقیقی دنیا کے مسائل (Real World Problems of Factorization)

اس حصہ میں ہم دو درجی اور سہ درجی الجبری جملوں کی تجزی کے تصور کو حقیقی دنیا کے مسائل جیسا کہ انجینئرنگ، فزکس اور فنانس پر لاگو کریں گے۔

مثال28: کسی پُرزے کی تیاری کے لیے لاگت کا تفاعل اس طرح ماڈل کیا گیا ہے:

$$C(x) = 5x^2 - 25x + 30$$

یہاں x جزو کی چوڑائی اور $C(x)$ قیمت ہے۔ x کی قیمت معلوم کریں یہاں $C(x)$ کم سے کم ہو۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل:
$$C(x) = 5x^2 - 25x + 30$$
$$= 5(x^2 - 5x + 6)$$
$$= 5(x^2 - 2x - 3x + 6)$$
$$= 5[x(x - 2) - 3(x - 2)]$$
$$= 5(x - 2)(x - 3)$$

اس طرح کم از کم لاگت اس وقت ہوتی ہے جب $x = 2$ یا $x = 3$ ہو۔

مثال29: کیوبک پوٹینشل میں حرکت کرنے والے جسم کی پوٹینشل توانائی $U(x)$ کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے:
$$U(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
جملہ کی تجزی کرتے ہوئے ان نقاط کو معلوم کریں جہاں توانائی کم سے کم ہو جائے۔

حل:
$$U(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
$$= (x)^3 - 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 - (2)^3$$
$$= (x - 2)^3$$
$$= (x - 2)(x - 2)(x - 2)$$

پوٹینشل توانائی تفاعل کی تجزی یہ ظاہر کرتی ہے کہ $x = 2$ پر توانائی کم سے کم ہے۔

مثال30: کمپنی کے منافع $P(x)$ کو دو درجی مساوات سے ظاہر کیا گیا ہے:
$$P(x) = -5x^2 + 50x - 120$$
یہاں x تیار شدہ اکائیوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور $P(x)$ منافع کو ڈالر میں ظاہر کرتا ہے۔ معلوم کریں کہ منافع کو زیادہ سے زیادہ کرنے کے لیے کتنے یونٹ تیار کرنے چاہییں۔

حل:
$$P(x) = -5x^2 + 50x - 120$$
$$= -5(x^2 - 10x + 24)$$
$$= -5[x^2 - 4x - 6x + 24]$$
$$= -5[x(x - 4) - 6(x - 4)]$$
$$= -5(x - 4)(x - 6)$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ منافع صفر تب ہو گا جب $x = 4$ یا $x = 6$ ہو۔ جیسا کہ x^2 کا عددی سر منفی ہے۔ زیادہ سے زیادہ منافع 4 اور 6 کے درمیانی نقطہ پر ہوتا ہے۔

$$x = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

پس کمپنی کو زیادہ سے زیادہ منافع حاصل کرنے کے لیے 5 اکائیاں بنانے چاہییں۔

مشق 4.4

1۔ درج ذیل جملوں کا جذر المربع بذریعہ تجزی معلوم کریں:

(i) $x^2 - 8x + 16$ (ii) $9x^2 + 12x + 4$

(iii) $36a^2 + 84a + 49$ (iv) $64y^2 - 32y + 4$

(v) $200t^2 - 120t + 18$ (vi) $40x^2 + 120x + 90$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

2۔ درج ذیل جملوں کا جذر المربع بذریعہ تقسیم معلوم کریں:

(i) $4x^4 - 28x^3 + 37x^2 + 42x + 9$

(ii) $121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144$

(iii) $x^4 - 10x^3y + 27x^2y^2 - 10xy^3 + y^4$

(iv) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 42x + 49$

3۔ x ہزار روپے کی سرمایہ کاری کے بعد ایک سرمایہ کار کی واپسی $R(x)$ روپے میں دو درجی جملہ دیا گیا ہے:

$$R(x) = -x^2 + 6x - 8$$

تجزی کریں اور سرمایہ کاری کی سطحیں معلوم کریں جس کے نتیجے میں صفر کی واپسی ہوتی ہو۔

4۔ کسی شے کی x اکائیاں فروخت کرنے سے روپوں میں کمپنی کا منافع $P(x)$ سہ درجی جملہ کے ذریعہ دیا گیا ہے:

$$P(x) = x^3 - 15x^2 + 75x - 125$$

مساوی نقطہ معلوم کریں جہاں منافع صفر ہو۔

5۔ برقی میدان میں پوٹینشل توانائی $V(x)$ فاصلہ x کے سہ درجی تفاعل کے طور پر مختلف ہوتی ہے:

$$V(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$$

معلوم کریں کہ پوٹینشل توانائی کہاں صفر ہے۔

6۔ ساختی انجینئرنگ میں شہتیر کا انحراف $Y(x)$ دیا گیا ہے:

$$Y(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

یہ مساوات شہتیر کے ساتھ کسی بھی نقطہ x پر عمودی انحراف دیتی ہے۔ صفر انحراف کے نقاط معلوم کریں۔

جائزہ مشق 4

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) $12x + 36$ کی تجزی ہے:

(a) $12(x + 3)$ (b) $12(3x)$ (c) $12(3x + 1)$ (d) $x(12 + 36x)$

(ii) $4x^2 - 12x + 9$ کے اجزائے ضربی ہیں:

(a) $(2x + 3)^2$ (b) $(2x - 3)^2$
(c) $(2x - 3)(2x + 3)$ (d) $(2 + 3x)(2 - 3x)^2$

(iii) a^3b^3 اور ab^2 کا عاد اعظم ہے:

(a) a^3b^3 (b) ab^2 (c) a^4b^5 (d) a^2b

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(iv) $16x^2$، $4x$ اور $30xy$ کا ذواضعاف اقل ہے:

(a) $480x^3y$　(b) $240xy$　(c) $240x^2y$　(d) $120x^4y$

(v) دو کثیر رقمی جملوں کا ____________ = ذواضعاف اقل اور عاد اعظم کا حاصل ضرب

(a) مجموعہ　(b) فرق　(c) حاصل ضرب　(d) حاصل تقسیم

(vi) $x^2 - 6x + 9$ کا جذرالمربع ہے:

(a) $\pm(x-3)$　(b) $\pm(x+3)$　(c) $x-3$　(d) $x+3$

(vii) $(a-b)^2$ اور $(a-b)^4$ کا ذواضعاف اقل ہے:

(a) $(a-b)^2$　(b) $(a-b)^3$　(c) $(a-b)^4$　(d) $(a-b)^6$

(viii) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ کی تجزی ہے:

(a) $(x+1)^3$　(b) $(x-1)^3$
(c) $(x+1)(x^2+x+1)$　(d) $(x-1)(x^2-x+1)$

(ix) سہ درجی کثیر رقمی جملے کا درجہ ہوتا ہے:

(a) 1　(b) 2　(c) 3　(d) 4

(x) $x^3 - 27$ کا ایک جزو ضربی ہے:

(a) $x-3$　(b) $x+3$　(c) x^2-3x+9　(d) a اور c دونوں

2۔ درج ذیل جملوں کی تجزی کریں:

(i) $4x^3 + 18x^2 - 12x$　(ii) $x^3 + 64y^3$
(iii) $x^3y^3 - 8$　(iv) $-x^2 - 23x - 60$
(v) $2x^2 + 7x + 3$　(vi) $x^4 + 64$
(vii) $x^4 + 2x^2 + 9$　(viii) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) - 360$
(ix) $(x^2+6x+3)(x^2+6x-9) + 36$

3۔ ذواضعاف اقل اور عاد اعظم معلوم کریں۔

(i) $4x^3 + 12x^2,\ 8x^2 + 16x$　(ii) $x^3 + 3x^2 - 4x,\ x^2 - 4x + 3$
(iii) $x^2 + 8x + 16,\ x^2 - 16$　(iv) $x^3 - 9x,\ x^2 - x - 6$

4۔ $16x^4 + 8x^2 + 1$ کا جذرالمربع بذریعہ تجزی اور بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

5۔ حوریہ اپنے قرض کی کل لاگت کا تجزیہ کر رہی ہے، جس کا ماڈل $C(x) = x^2 - 8x + 15$ ہے جہاں x سالوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ حوریہ کے قرض کی ادائیگی کی بہترین مدت کیا ہے؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ 5

یک درجی مساواتیں اور غیر مساواتیں
(Linear Equations and Inequalities)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- یک درجی مساواتوں اور غیر مساواتوں کو ناطق عددی سروں کے ساتھ حل کر سکیں اور ان کے حل سیٹ کو عددی خط پر ظاہر کر سکیں۔
- دو یک درجی غیر مساواتوں کو ایک ساتھ دو نامعلوم مقداروں کے ساتھ حل کر سکیں۔
- دو نامعلوم مقداروں میں دو یک درجی غیر مساواتوں سے بننے والے خِطوں کی جانچ اور شناخت کر سکیں۔
- قابل عمل حل میں نقاط کا استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں معلوم کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

حقیقی دنیا کے مسائل کو ماڈل بنانے اور حل کرنے کے لیے یک درجی مساواتوں اور غیر مساواتوں کو مختلف شعبوں میں وسیع پیمانے پر استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ متغیرات کے درمیان تعلقات کو سمجھنے اور فیصلے کرنے میں مدد کرتی ہیں۔ اس یونٹ میں ہمارا بنیادی مقصد کچھ محدود پابندیوں کے ساتھ زیرِ غور مقدار کو (زیادہ سے زیادہ یا کم از کم) موافق بنانا ہوگا۔

5.1 یک درجی مساوات (Linear Equation)

ایسی مساوات جو $ax + b = 0$ کی شکل میں ہو جہاں 'a' اور 'b' مستقل مقداریں ہیں، $a \neq 0$ اور 'x' ایک متغیر ہے، اسے ایک متغیر میں یک درجی مساوات کہا جاتا ہے۔ یک درجی مساوات میں متغیر کی سب سے زیادہ قوت ہمیشہ 1 ہوتی ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> $ax + b = 0$ جب کہ $a \neq 0$ کو ایک متغیر میں یک درجی مساوات کی معیاری شکل بھی کہا جاتا ہے۔

5.1.1 ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنا
(Solving a Linear Equation in One Variable)

ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنے کا مطلب متغیر کی قیمت معلوم کرنا ہوتا ہے جو مساوات کو درست بناتا ہے۔ مساوات کو حل کرنے کے لیے مساوات کے ایک طرف متغیر کو الگ کر کے اس کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنے کے اقدامات

دونوں اطراف کو مختصر کرنا (اگر ضروری ہو)

- مساوات کے اطراف ایک جیسی رقوم کو اکٹھا کریں۔
- اگر بریکٹیں ہوں تو ان کو کھول کر جملوں کو مختصر کریں۔

متغیر مقدار کو الگ کرنا

- تمام متغیر مقداروں کو مساوات کے ایک طرف اور تمام مستقل مقداروں کو دوسری طرف منتقل کریں۔ ایسا کرنے کے لیے ہم مساوات کے دونوں اطراف رقوم کو جمع اور تفریق کر سکتے ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

متغیر کے لیے حل کرنا

- جب متغیر رقم الگ ہو جائے تو متغیر کے عددی سر کو مساوات کے دونوں اطراف ضرب یا تقسیم کر کے حل کریں۔

اپنا حل چیک کرنا

- حل کو اصل مساوات میں درج کریں تا کہ یہ یقینی بنایا جاسکے کہ حل درست ہے۔

مثال 1: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $3x-5=7$ (ii) $\dfrac{x-2}{5}-\dfrac{x-4}{2}=2$

حل: (i)

$$3x-5=7$$
$$3x-5+5=7+5$$
$$3x=12$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$$
$$x=4$$

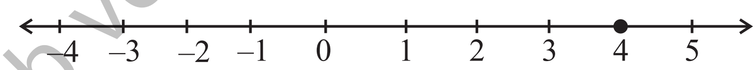
یاد رکھیے!
ایک متغیر میں یک درجی مساوات کا صرف ایک حل ہوتا ہے۔

پڑتال: دی گئی مساوات میں $x = 4$ درج کرنے سے

$$3(4)-5=7$$
$$12-5=7$$
$$7=7$$

پس $x = 4$ اس مساوات کا حل ہے کیوں کہ یہ اصلی مساوات کو صحیح ثابت کرتا ہے۔

عددی خط پر حل کا اظہار:



شکل 5.1

(ii)

$$\frac{x-2}{5}-\frac{x-4}{2}=2$$
$$\frac{2(x-2)-5(x-4)}{10}=2$$
$$\frac{2x-4-5x+20}{10}=2$$
$$\frac{-3x+16}{10}=2$$

یاد رکھیے!
ہم اپنے کام کی درستی کو یقینی بنانے کے لیے یک درجی مساوات کو حل کرنے کے بعد اِس کے حل کو چیک کرتے ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

$$\frac{-3x+16}{10}\times 10 = 2\times 10$$

$$-3x+16=20$$

$$-3x+16-16=20-16$$

$$-3x=4$$

$$x=-\frac{4}{3}$$

پڑتال: دی گئی مساوات میں $x=-\frac{4}{3}$ درج کرنے سے

$$\frac{-\frac{4}{3}-2}{5}-\frac{-\frac{4}{3}-4}{2}=2$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{-4-6}{3}}{5}-\frac{\frac{-4-12}{3}}{2}=2$$

$$\Rightarrow \frac{-10}{15}-\frac{-16}{6}=2$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2$$

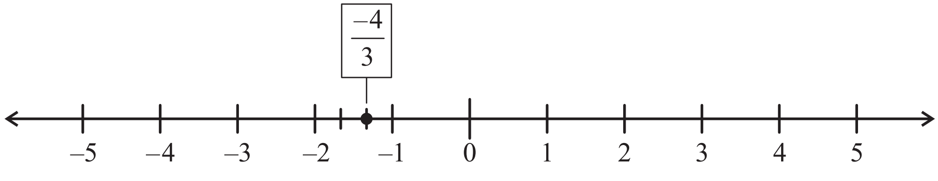
$$\Rightarrow \frac{-2+8}{3}=2$$

$$\Rightarrow \frac{6}{3}=2$$

$$\Rightarrow 2=2$$

پس $x=-\frac{4}{3}$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

عددی خط پر حل کا اظہار:



شکل 5.2

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

5.2 یک درجی غیر مساواتیں (Linear Inequalities)

غیر مساواتوں کو درج ذیل چار علامتوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$>$ (بڑا ہے)، $<$ (چھوٹا ہے)، $\geq$ (بڑا اور برابر ہے)، $\leq$ (چھوٹا اور برابر ہے)

مثال کے طور پر:

(i) $ax < b$ (ii) $ax + b \geq c$ (iii) $ax + by > c$ (iv) $ax + by \leq c$

غیر مساواتیں ہیں۔ غیر مساواتیں (i) اور (ii) ایک متغیر میں ہیں جب کہ غیر مساواتیں (iii) اور (iv) دو متغیرات میں ہیں۔ اگر غیر مساواتوں کو مساوی آسان شکل میں تبدیل کیا جائے تو درج ذیل عوامل غیر مساواتوں کی ترتیب کو متاثر نہیں کریں گے:

(i) مستقل مقدار کو دونوں اطراف جمع یا تفریق کرنا۔

(ii) مثبت عدد سے دونوں اطراف کو ضرب یا تقسیم کرنا۔

> **کیا آپ جانتے ہیں؟**
> منفی عدد کو دونوں اطراف سے ضرب یا تقسیم کرنے سے غیر مساوات کی ترتیب بدل جاتی ہے۔

مثال 2: $\frac{2}{3}x - 1 < 0$ کو حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل:

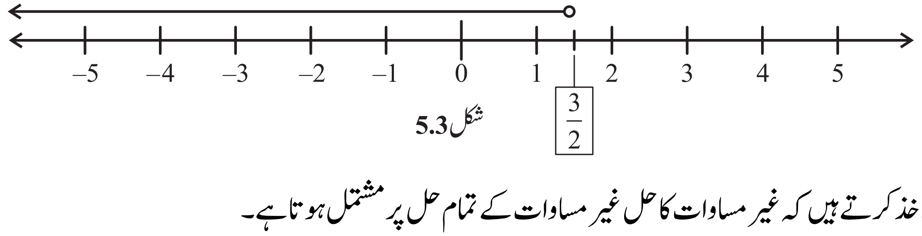
$$\frac{2}{3}x - 1 < 0 \qquad ...(i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}x < 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x < 3$$

$$\Rightarrow \quad x < \frac{3}{2}$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ $\frac{3}{2}$ سے چھوٹے تمام حقیقی اعداد (i) کا حل ہیں۔ پس $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ یا $-\infty < x < \frac{3}{2}$ دی گئی غیر مساوات کا حل ہے جس کو شکل 5.3 میں ظاہر کیا گیا ہے۔



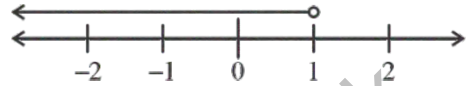
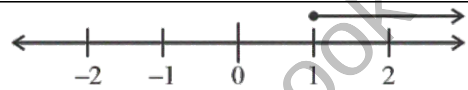
شکل 5.3

ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ غیر مساوات کا حل غیر مساوات کے تمام حل پر مشتمل ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

درج ذیل غیر مساواتیں اور ان کے حل عددی خط پر ظاہر کیے گئے ہیں:

غیر مساوات	حل	حقیقی خط پر اظہار
$x > 1$	$(1, \infty)$ or $1 < x < \infty$	
$x < 1$	$(-\infty, 1)$ or $-\infty < x < 1$	
$x \geq 1$	$[1, \infty)$ or $1 \leq x < \infty$	
$x \leq 1$	$(-\infty, 1]$ or $-\infty < x \leq 1$	

5.2.1 دو متغیرات میں غیر مساوات کو حل کرنا
(Solution of a Linear Inequality in Two Variables)

عام طور پر دو متغیرات x اور y میں یک درجی غیر مساوات درج ذیل شکلوں میں سے ایک ہو سکتی ہے:

$$ax + by < c; \quad ax + by > c; \quad ax + by \leq c; \quad ax + by \geq c$$

یہاں a، b، c مستقل مقداریں ہیں اور a ، b دونوں صفر نہیں ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ یک درجی مساوات $ax + by = c$ کا گراف ایک خط ہوتا ہے جو مستوی کو دو متضاد خِطوں (regions) میں تقسیم کرتا ہے جیسا کہ ذیل میں بیان کیا گیا ہے:

(i) مترتب جوڑوں (x, y) کا سیٹ جیسے کہ $ax + by < c$

(ii) مترتب جوڑوں (x, y) کا سیٹ جیسے کہ $ax + by > c$

خطوط (i) اور (ii) کو نصف مستوی کہا جاتا ہے اور خط $ax + by = c$ کو ہر نصف مستوی کی سرحد کہا جاتا ہے۔

نوٹ کریں کہ عمودی خط مستوی کو بائیں اور دائیں نصف مستویوں میں تقسیم کرتا ہے جب کہ غیر عمودی خط مستوی کو اوپر اور نیچے نصف مستویوں میں تقسیم کرتا ہے۔

یاد رکھیے!

x اور y میں یک درجی غیر مساوات کا حل ایک مترتب جوڑا ہوتا ہے جو غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

مثال کے طور پر، مترتب جوڑا $(1, 1)$ غیر مساوات $x + 2y < 6$ کا حل ہے کیونکہ $1 + 2(1) = 3 < 6$ جو کہ درست ہے۔

لامحدود مترتب جوڑے غیر مساوات $x + 2y < 6$ کو درست ثابت کرتے ہیں، لہٰذا اس کا گراف نصف مستوی ہوگا۔

نوٹ کریں کہ یک درجی مساوات $ax + by = c$ کو اوپر بیان کردہ ہر ایک غیر مساوات کی "متعلقہ مساوات" کہا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

دو متغیرات میں یک درجی غیر مساوات کا گراف بنانے کا طریقہ کار

(i) اگر غیر مساوات میں علامتیں > یا < شامل ہوں تو غیر مساوات کی متعلقہ مساوات کو پہلے 'نقطے' استعمال کر کے گراف بنایا جاتا ہے اور اگر غیر مساوات میں علامتیں $\leq$ یا $\geq$ شامل ہوں تو ایک ٹھوس خط کھینچا جاتا ہے۔

(ii) ایک آزمائشی نقطہ (متعلقہ مساوات کے گراف پر نہیں) کا انتخاب کیا جاتا ہے جو طے کرتا ہے کہ نصف مستوی سرحدی خط کے کس طرف واقع ہے۔

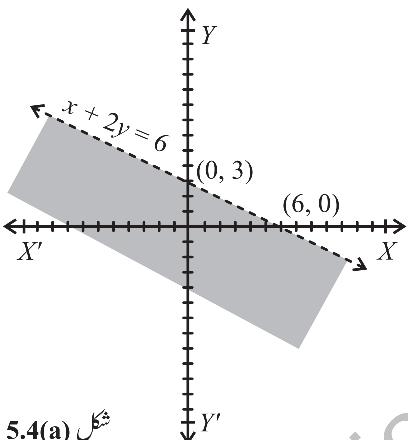
کیا آپ جانتے ہیں؟

آزمائشی نقطہ ایک ایسا نقطہ ہوتا ہے جس کا انتخاب اس بات کا تعین کرنے کے لیے ہوتا ہے کہ سرحدی خط کا کون سا رُخ غیر مساوات کے حل کے خِطے کو ظاہر کرتا ہے۔ عام طور پر ہم (0،0) کو ایک آزمائشی نقطہ کے طور پر لیتے ہیں۔

- اگر آزمائشی نقطہ کے ساتھ غیر مساوات درست ہو تو اس نقطہ پر مشتمل خِطہ حل کا حصہ ہوتا ہے۔
- اگر غیر مساوات غلط ہے تو مخالف خِطہ حل کا خِطہ ہوتا ہے۔

مثال 3: $x + 2y < 6$ کو حل کریں۔

حل: غیر مساوات $x + 2y < 6 \ \dots(i)$ کی متعلقہ مساوات $x + 2y = 6 \ \dots(ii)$ ہے۔

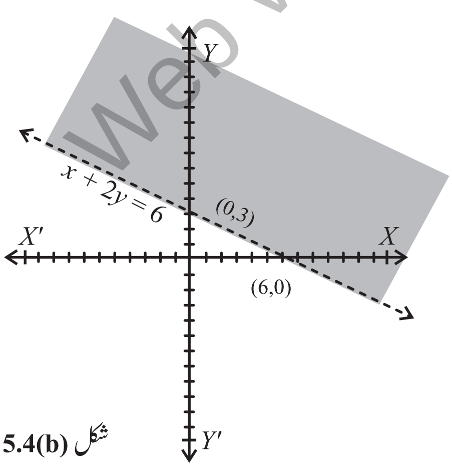


شکل 5.4(a)

خط (ii) x- محور اور y- محور کو بالترتیب $(6, 0)$ اور $(0, 3)$ پر کاٹتی ہے۔ چوں کہ خط (ii) کا کوئی بھی نقطہ غیر مساوات (i) کا حل نہیں ہے، لہٰذا خط (ii) کا گراف نقطوں کا استعمال کر کے ظاہر کیا گیا ہے۔ عام طور پر ہم $O(0, 0)$ کو آزمائشی نقطہ کے طور پر لیتے ہیں کیونکہ یہ خط (ii) پر واقع نہیں ہے۔

$x = 0$ اور $y = 0$ جملہ $x + 2y$ میں درج کرنے سے $0 + 2(0) = 0 < 6$ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا نقطہ $(0, 0)$ غیر مساوات (i) کو درست ثابت کرتا ہے۔

اس طرح غیر مساوات (i) کے حل سیٹ کا گراف ایک خِطہ ہے جو خط (ii) کے $(0, 0)$ کی طرف واقع ہے، یعنی خط (ii) کے نیچے کا خِطہ۔ خط (ii) کے نیچے کھلی نصف مستوی کا حصہ شکل 5.4 (a) میں سایہ دار خِطے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.4(b)

نوٹ: نقطہ دار خط کے اوپر والے حصے کے تمام نقاط غیر مساوات $x + 2y > 6 \ \dots(iii)$ کو درست ثابت کرتے ہیں۔

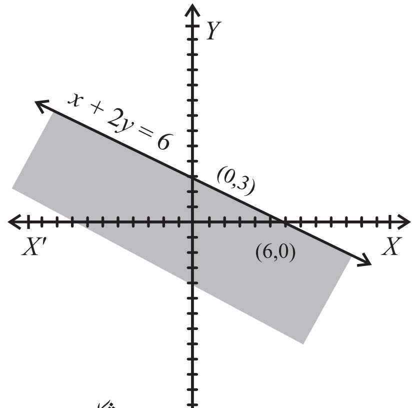
خط (ii) کے اوپر کھلی نصف مستوی کا ایک حصہ شکل 5.4 (b) میں سایہ دار خِطے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

نوٹ 1:

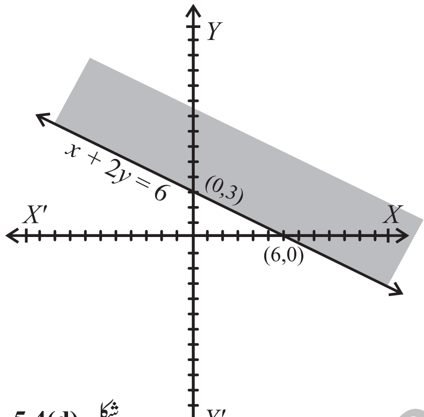
غیر مساوات (iv)... $x + 2y \le 6$ کے گراف میں خط (ii) کا گراف شامل ہے۔
خط (ii) کے نیچے کھلی نصف مستوی خط (ii) کے گراف سمیت غیر مساوات (iv) کا گراف ہے۔ غیر مساوات (iv) کے گراف کا حصہ شکل (c) 5.4 میں سایہ دار خِطّے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.4(c)

نوٹ 2:

خط (ii) پر اور اس کے اوپر تمام نقاط غیر مساوات (v) ... $x + 2y \ge 6$ کو درست ثابت کرتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ غیر مساوات (v) کا حل سیٹ خط (ii) کے اوپر کے تمام نقاط اور خط (ii) کے تمام نقاط پر مشتمل ہے۔
غیر مساوات (v) کا گراف سایہ دار خِطّے کے طور پر شکل (d) 5.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.4(d)

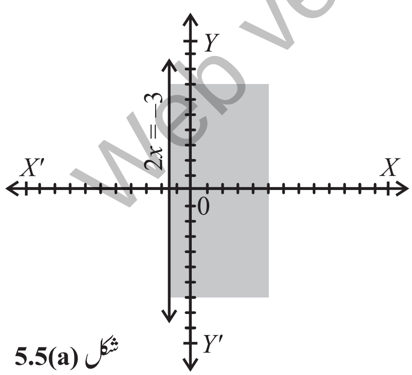
نوٹ 3: $x + 2y \le 6$ اور $x + 2y \ge 6$ کے گراف بند نصف مستوی کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 4: xy-مستوی میں درج ذیل یک درجی غیر مساوات کو حل کریں:

(i) $2x \ge -3$ (ii) $y \le 2$

حل: (i) xy-مستوی میں غیر مساوات $2x \ge -3$ کو $2x + 0y \ge -3$ سمجھا جاتا ہے اور اس کا حل سیٹ تمام نقاط (x, y) پر مشتمل ہوتا ہے۔
جب کہ $x \ge -\frac{3}{2}$ اور $x, y \in R$

دی گئی غیر مساوات کی متعلقہ مساوات (a)... $2x = -3$ ہے۔
جو کہ ایک عمودی خط (y- محور کے متوازی) ہے اور اس کا گراف شکل (a)5.5 میں دکھایا گیا ہے۔



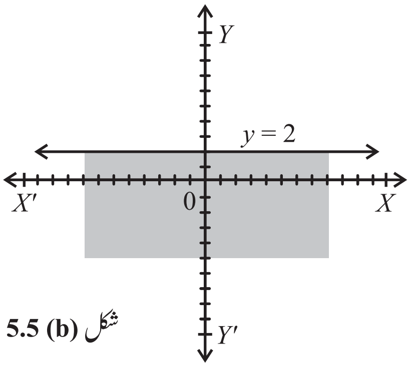
شکل 5.5(a)

اس طرح $2x \ge -3$ کا گراف سرحدی خط (a) اور اس کے دائیں جانب کھلی نصف مستوی پر مشتمل ہے۔

(ii) غیر مساوات $y \le 2$ کی متعلقہ مساوات $y = 2$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

جو کہ ایک افقی خط (x- محور کے متوازی) ہے اور اس کا گراف شکل 5.5 (b) میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں غیر مساوات $y < 2$ کا حل سیٹ سرحدی خط $y = 2$ کے نیچے کھلی نصف مستوی پر مشتمل ہے۔ اس طرح $y \leq 2$ کا گراف سرحدی خط اور اس کے نیچے کھلی نصف مستوی پر مشتمل ہے۔



شکل 5.5 (b)

5.2.2 دو متغیرات میں دو یک درجی غیر مساواتوں کو حل کرنا

(Solution of Two Linear Inequalities in Two Variables)

یک درجی غیر مساواتوں کے نظام کا گراف xy-مستوی میں تمام مترتب جوڑوں (x, y) کے سیٹ پر مشتمل ہوتا ہے جو بیک نظام میں موجود تمام غیر مساواتوں کو درست ثابت کرتے ہیں۔ اس طرح کے نظام کا گراف تشکیل دینے کے لیے ہم ہر غیر مساوات کے گراف کو ایک ہی مستوی پر کھینچتے ہیں اور پھر تمام گراف کا تقاطع لیتے ہیں۔ اس طرح حاصل کردہ مشترکہ خِطہ غیر مساواتوں حل کا خِطہ (solution region) کہلاتا ہے۔

مثال 5: غیر مساواتوں کے نظام کا گراف بنا کر حل کا خِطہ معلوم کریں۔

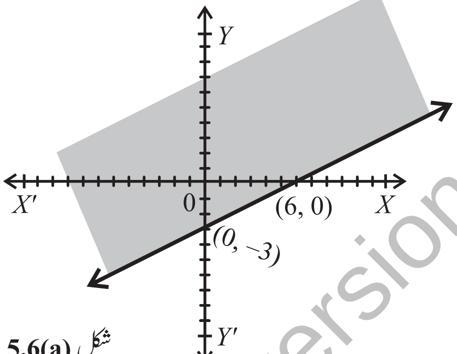
$$x - 2y \leq 6$$
$$2x + y \geq 2$$

حل:

$$x - 2y \leq 6 \qquad \ldots(\text{i})$$
$$2x + y \geq 2 \qquad \ldots(\text{ii})$$

درج ذیل (i) کی متعلقہ مساوات ہے

$$x - 2y = 6 \qquad \ldots(\text{iii})$$



شکل 5.6(a)

x قاطع کے لیے، $y = 0$ کو (iii) میں درج کرنے سے

$$x - 2(0) = 6$$
$$x - 0 = 6$$
$$\Rightarrow \quad x = 6$$

اس سے نقطہ $(6, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔

y قاطع کے لیے، $x = 0$ کو (iii) میں درج کرنے سے

$$0 - 2y = 6$$
$$\Rightarrow \quad -2y = 6$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{6}{-2} = -3$$

اس سے نقطہ $(0, -3)$ حاصل ہوتا ہے۔

خط $x - 2y = 6$ کا گراف نقاط $(6, 0)$ اور $(0, -3)$ کو ملا کر تیار کیا جاتا ہے۔ نقطہ $(0, 0)$ غیر مساوات $x - 2y < 6$ کو درست ثابت کرتا ہے کیوں کہ $0 - 2(0) = 0 < 6$

اس طرح $x - 2y \leq 6$ کا گراف خط $x - 2y = 6$ اور اوپری نصف مستوی پر مشتمل ہے۔ بند نصف مستوی کو جزوی طور پر شکل 5.6 (a) میں سایہ دار حصے کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

درج ذیل (ii) کی متعلقہ مساوات ہے

$$2x + y = 2 \qquad \ldots(iv)$$

x قاطع کے لیے، $y = 0$ کو (iv) میں درج کرنے سے

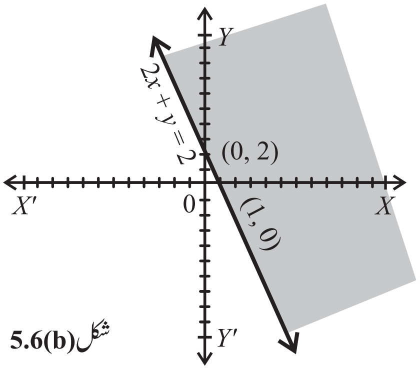
$$2x + 0 = 2$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 2$$
$$\Rightarrow \quad x = 1$$

اس سے نقطہ $(1, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔

y قاطع کے لیے، $x = 0$ کو (iv) میں درج کرنے سے

$$2(0) + y = 2$$
$$\Rightarrow \quad y = 2$$

اس سے نقطہ $(0, 2)$ حاصل ہوتا ہے۔

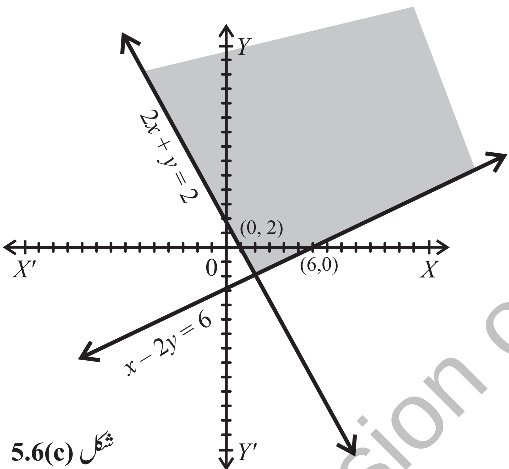


شکل 5.6(b)

ہم نقاط $(1, 0)$ اور $(0, 2)$ کو ملا کر خط $2x + y = 2$ کا گراف کھینچتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0)$ دی گئی غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا کیوں کہ

$$2(0) + 0 = 0 \ngtr 2$$

اس طرح دی گئی غیر مساوات کا گراف خط $2x + y = 2$ کے مرکز کی طرف بند نصف مستوی پر مشتمل اور جزوی طور پر شکل 5.6 (b) میں سایہ دار حصے کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.6(c)

پس دی گئی غیر مساواتوں کے نظام کے حل کا خِطہ شکل 5.6 (a) اور شکل 5.6 (b) میں دکھائے گئے گراف کا تقاطع ہے جسے شکل 5.6 (c) میں سایہ دار خِطے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔

مشق 5.1

1۔ درج ذیل مساواتوں کو حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $12x + 30 = -6$　　(ii) $\dfrac{x}{3} + 6 = -12$　　(iii) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3x}{4} = \dfrac{1}{12}$

(iv) $2 = 7(2x + 4) + 12x$　　(v) $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{3\ x}{4} = \dfrac{5}{6}$　　(vi) $\dfrac{-5x}{10} = 9 - \dfrac{10}{5}x$

2۔ درج ذیل غیر مساواتوں کو حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $x - 6 \le -2$　　(ii) $-9 > -16 + x$　　(iii) $3 + 2x \ge 3$

(iv) $6(x + 10) \le 0$　　(v) $\dfrac{5}{3}x - \dfrac{3}{4} < \dfrac{-1}{12}$　　(vi) $\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} \le -1 + \dfrac{1}{2}x$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

3۔ درج ذیل یک درجی غیر مساواتوں کے حل کا خِطہ xy-مستوی میں سایہ دار کر کے ظاہر کریں۔

(i) $2x + y \le 6$　(ii) $3x + 7y \ge 21$　(iii) $3x - 2y \ge 6$

(iv) $5x - 4y \le 20$　(v) $2x + 1 \ge 0$　(vi) $3y - 4 \le 0$

4۔ درج ذیل یک درجی غیر مساواتوں کے حل کا خِطہ سایہ دار کر کے ظاہر کریں۔

(i) $2x - 3y \le 6$, $2x + 3y \le 12$　(ii) $x + y \ge 5$, $-y + x \le 1$　(iii) $3x + 7y \ge 21$, $x - y \le 2$

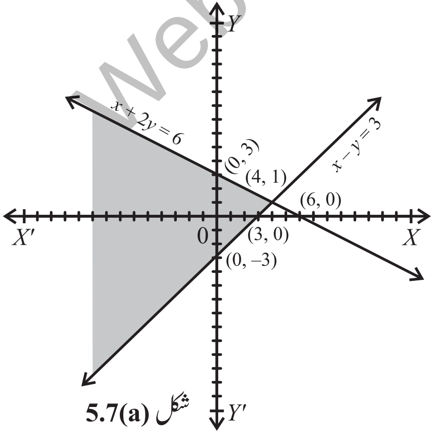
(iv) $4x - 3y \le 12$, $x \ge -\frac{3}{2}$　(v) $3x + 7y \ge 21$, $y \le 4$　(vi) $5x + 7y \le 35$, $x - 2y \le 2$

5.3 قابل عمل حل (Feasible Solution)

روزمرہ زندگی سے کسی خاص مسئلے سے نمٹنے کے لیے، مسئلہ سے متعلق ہر یک درجی غیر مساوات کو مسئلہ کی رکاوٹ (problem constraint) کا نام دیا جاتا ہے۔ متعلقہ مسئلہ میں شامل یک درجی غیر مساوات کے نظام کو مسئلہ کی رکاوٹیں کہا جاتا ہے۔ روزمرہ زندگی کے مسائل سے متعلق یک درجی غیر مساوات کے نظام میں استعمال ہونے والے متغیرات غیر منفی ہوتے ہیں اور انہیں غیر منفی رکاوٹیں (non-negative constraints) کہا جاتا ہے۔ یہ غیر منفی رکاوٹیں فیصلہ لینے میں اہم کردار ادا کرتی ہیں۔ لہٰذا ان متغیرات کو تصفیہ کرنے والے متغیرات (decision variables) کہا جاتا ہے۔ ایک ایسا خِطہ جو پہلے ربع تک محدود ہو اسے دی گئی رکاوٹوں کے سیٹ کے لیے قابل عمل خِطہ (feasible solution) کہا جاتا ہے۔ قابل عمل خِطے کے ہر نقطہ کو یک درجی غیر مساوات کے نظام کا ایک قابل عمل حل کہا جاتا ہے۔

مثال 6: درج ذیل غیر مساواتوں کے نظام کے لیے قابل عمل خِطے کو سایہ دار کریں اور اِس کے کونوں کے نقاط بھی معلوم کریں۔

$$x - y \le 3$$
$$x + 2y \le 6, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$$



شکل 5.7(a)

حل: غیر مساواتوں (i) ... $x - y \le 3$ اور (ii) ... $x + 2y \le 6$ کی متعلقہ مساواتیں (iii) ... $x - y = 3$ اور (iv) ... $x + 2y = 6$ ہیں۔

جیسا کہ نقاط $(3, 0)$ اور $(0, -3)$ خِطہ (iii) پر واقع ہیں اس لیے ان دونوں نقاط کو ملا کر خط کھینچا گیا ہے۔

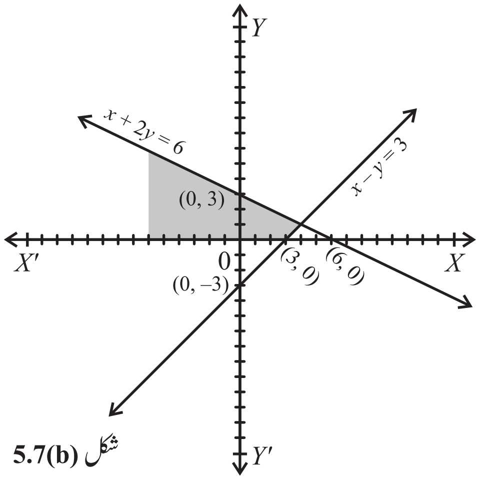
NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

اسی طرح خط (iv) نقاط (6, 0) اور (0, 3) کو ملا کر کھینچا گیا ہے۔ $x = 0$ اور $y = 0$ کو مساوات (iii) اور (iv) میں درج کرنے سے $0 - 0 = 0 < 3$ اور $0 + 2(0) = 0 < 6$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں بند نصف مستویاں خطوط (iii) اور (iv) کے مرکز کی طرف ہیں۔

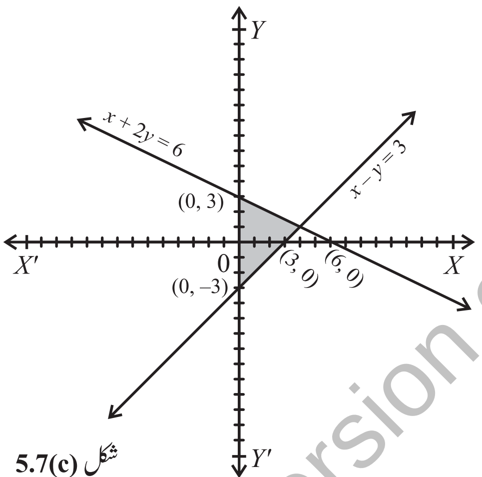
ان دونوں بند نصف مستویوں کو جزوی طور پر شکل 5.7 (a) میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔

$y \geq 0$ کا گراف اوپر والی بند نصف مستوی ہوگا۔ شکل 5.7 (a) اور اوپر والی بند نصف مستوی کا تقاطع جزوی طور پر شکل 5.7 (b) میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔



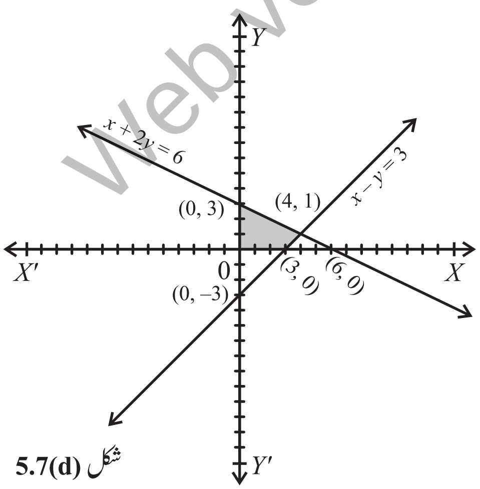
شکل 5.7(b)

$x \geq 0$ کا گراف نچلی بند نصف مستوی ہوگا۔ شکل 5.7 (a) اور نچلی بند نصف مستوی کا تقاطع جزوی طور پر شکل 5.7 (c) میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.7(c)

آخر میں یک درجی غیر مساواتوں کے نظام کا گراف شکل 5.7 (d) میں دکھایا گیا ہے جو یک درجی غیر مساواتوں کے نظام کے لیے قابل عمل خِطہ ہے۔ نقاط (0, 0)، (3, 0)، (4, 1) اور (0, 3) قابل عمل خِطے کے کونوں کے نقاط ہیں۔



شکل 5.7(d)

یاد رکھیے!

حل کے خِطے کا ایک نقطہ جہاں اس کے دو سرحدی خطوط آپس میں ملتے ہیں، اسے حل کے خِطے کے کونے کا نقطہ یا راس کہا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

قابل عمل حل میں کسی تفاعل کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں
(Maximum and Minimum Values of a Function in the Feasible Solution)

ایسا تفاعل جس کو زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم کیا جائے اسے آبجیکٹو تفاعل (objective function) کہا جاتا ہے۔ نوٹ کریں کہ قابل عمل خطے میں لاتعداد ممکنہ حل موجود ہوتے ہیں۔ قابل عمل حل جو آبجیکٹو تفاعل کو زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم کرتا ہے اسے نہایت موافق حل (optimal solution) کہا جاتا ہے۔

نہایت موافق حل معلوم کرنے کا طریقہ کار (Procedure for determining optimal solution)

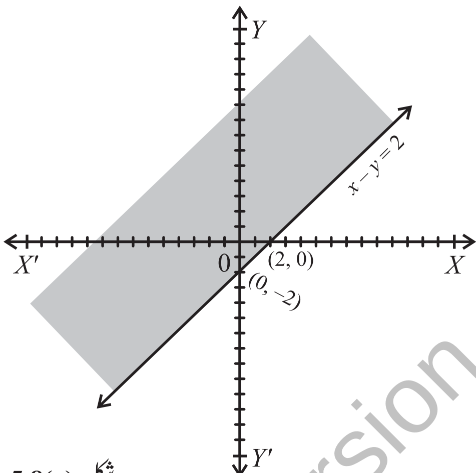
(i) قابل عمل خطے کا تعین کرنے کے لیے یک درجی غیر مساوات کی رکاوٹوں کے حل کے سیٹ کا گراف بنائیں۔
(ii) قابل عمل خطے کے کونوں کے نقاط معلوم کریں۔
(iii) نہایت موافق حل معلوم کرنے کے لیے ہر کونے کے نقطہ پر آبجیکٹو تفاعل معلوم کریں۔

مثال 7: تفاعل کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں معلوم کریں جس کی وضاحت کی گئی ہے:

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

شرائط کے تابع ;

$$x - y \le 2$$
$$x + y \le 4$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$



شکل 5.8(a)

حل:

$$x - y \le 2 \quad \ldots(i)$$
$$x + y \le 4 \quad \ldots(ii)$$

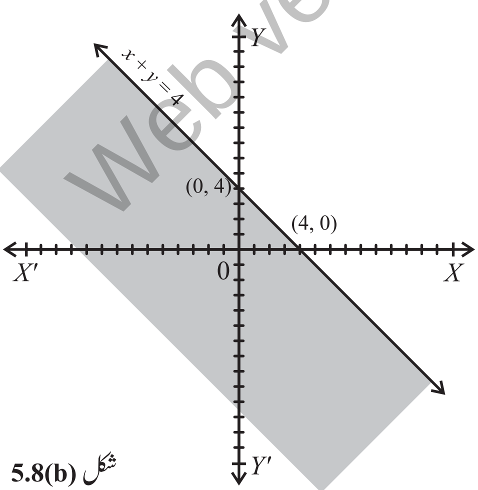
(i) کی متعلقہ مساوات $x - y = 2$ ہے۔

$x - y = 2$ کے x قاطع اور y قاطع بالترتیب $(2, 0)$ اور $(0, -2)$ ہیں۔ خط $x - y = 2$ کا گراف نقاط $(2, 0)$ اور $(0, -2)$ کو ملا کر کھینچا گیا ہے۔

نقطہ $(0, 0)$ غیر مساوات $x - y \le 2$ کو درست ثابت کرتا ہے کیوں کہ

$$0 - 0 = 0 < 2$$

پس $x - y \le 2$ کا گراف خط $x - y = 2$ اور اوپر والی نصف مستوی پر مشتمل ہے جس کو جزوی طور پر شکل (a) 5.8 میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔



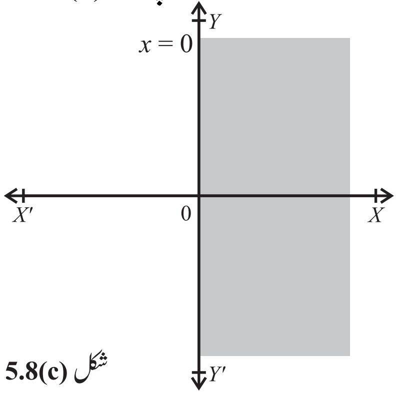
شکل 5.8(b)

(ii) کی متعلقہ مساوات $x + y = 4$ ہے۔

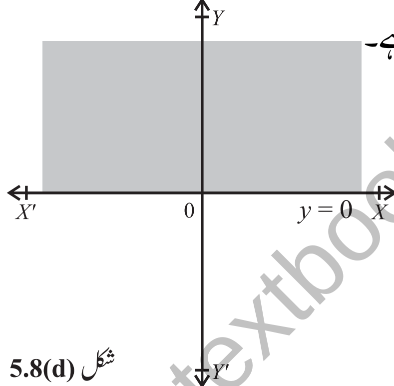
NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

$x + y = 4$ کے x قاطع اور y قاطع بالترتیب $(4, 0)$ اور $(0, 4)$ ہیں۔ خط $x + y = 4$ کا گراف نقاط $(4, 0)$ اور $(0, 4)$ کو ملا کر کھینچا گیا ہے۔

نقطہ $(0, 0)$ غیر مساوات $x + y \le 4$ کو درست ثابت کرتا ہے۔ بند نصف مستوی کو جزوی طور پر شکل (b) 5.8 میں سایہ دار کر کے دکھایا گیا ہے۔



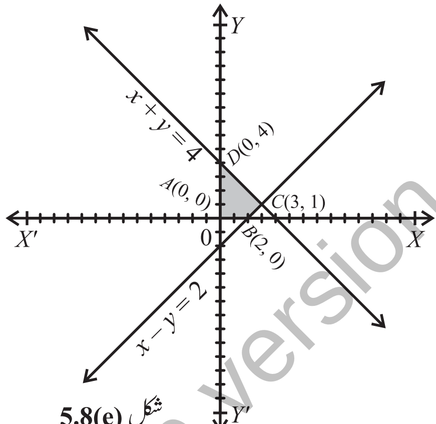
شکل 5.8(c)



شکل 5.8(d)

$x \ge 0$ اور $y \ge 0$ کے گراف بالترتیب اشکال (c) 5.8 اور (d) 5.8 میں سایہ دار کر کے دکھائے گئے ہیں۔

غیر مساوات کے دیے گئے نظام کا قابل عمل خِطہ اشکال (a) 5.8، (b) 5.8، (c) 5.8 اور (d) 5.8 میں دکھائے گئے گراف کا تقاطع ہے اور شکل (e) 5.8 میں سایہ دار خِطہ $ABCD$ کے طور پر دکھایا گیا ہے۔



شکل 5.8(e)

قابل عمل خِطہ کے کونوں کے نقاط $(0, 0)$، $(2, 0)$، $(3, 1)$ اور $(0, 4)$ ہیں۔ اب ہم کونوں کے نقاط پر $f(x, y) = 2x + 3y$ کی قیمتیں معلوم کرتے ہیں۔

$$f(0, 0) = 2(0) + 3(0) = 0$$
$$f(2, 0) = 2(2) + 3(0) = 4$$
$$f(3, 1) = 2(3) + 3(1) = 9$$
$$f(0, 4) = 2(0) + 3(4) = 12$$

پس f کی کم سے کم قیمت کونے کے نقطہ $(0, 0)$ پر 0 اور زیادہ سے زیادہ قیمت کونے کے نقطہ $(0,4)$ پر 12 ہے۔

مشق 5.2

1۔ $f(x, y) = 2x + 5y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$2y - x \le 8$; $x - y \le 4$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

2۔ $f(x, y) = x + 3y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$2x + 5y \le 30$; $5x + 4y \le 20$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

3۔ $z = 2x + 3y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$2x + y \le 4$ ؛ $4x - y \le 2$ ؛ $x \ge 0$ ؛ $y \ge 0$

4۔ $z = 2x + y$ کی کم سے کم قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$x + y \ge 3$ ؛ $7x + 5y \le 35$ ؛ $0 \le x$ ؛ $y \ge 0$

5۔ $f(x, y) = 2x + 3y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$2x + y \le 10$ ؛ $x + 2y \le 14$ ؛ $x \ge 0$ ؛ $y \ge 0$

6۔ $z = 3x + y$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں معلوم کریں۔ جب کہ

$3x + 5y \ge 15$ ؛ $x + 3y \le 9$ ؛ $x \ge 0$ ؛ $y \ge 0$

Web version of PCTB textbook

جائزہ مشق 5

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) درج ذیل میں یک درجی مساوات ہے:

(a) $5x > 7$ (b) $4x - 2 < 1$
(c) $2x + 1 = 1$ (d) $4 = 1 + 3$

(ii) $5x - 10 = 10$ کا حل ہے:

(a) 0 (b) 50
(c) 4 (d) – 4

(iii) اگر $7x + 4 < 6x + 6$ ہو تو x کا حل ہے:

(a) $(2, \infty)$ (b) $[2, \infty)$
(c) $(-\infty, 2)$ (d) $(-\infty, 2]$

(iv) عمودی خط مستوی کو تقسیم کرتا ہے:

(a) بائیں نصف مستوی (b) دائیں نصف مستوی
(c) پوری مستوی (d) دو آدھی مستویاں

(v) یک درجی غیر مساوات سے بننے والی مساوات کو کہا جاتا ہے:

(a) سہ درجی مساوات (b) متعلقہ مساوات
(c) دو درجی مساوات (d) قابل عمل خطِ

(vi) $3x + 4 < 0$ ہے:

(a) مساوات (b) غیر مساوات
(c) غیر مساوات نہیں (d) اکائی

NOT FOR SALE-PESRP

(vii) کونے کا نقطہ کہلاتا ہے:

(a) کوڈ (b) راس

(c) خط (d) خِطہ

(viii) $(0, 0)$ کا حل ہے:

(a) $4x + 5y > 8$ (b) $3x + y > 6$

(c) $-2x + 3y < 0$ (d) $x + y > 4$

(ix) حل کا خِطہ جو پہلے ربع تک محدود ہو، کہلاتا ہے:

(a) آبجیکٹو خِطہ (b) قابل عمل خِطہ

(c) حل خِطہ (d) رکاوٹوں کا خِطہ

(x) تفاعل جس کو کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ کیا جائے، کہلاتا ہے:

(a) حل کا تفاعل (b) آبجیکٹو تفاعل

(c) قابل عمل تفاعل (d) ان میں سے کوئی نہیں

2۔ حل کریں اور عددی خط پر ظاہر کریں۔

(i) $\frac{x+5}{3} = 1 - x$ (ii) $\frac{2x+1}{3} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{x-1}{3}$

(iii) $3x + 7 < 16$ (iv) $5(x - 3) \geq 26x - (10x + 4)$

3۔ درج ذیل یک درجی غیر مساواتوں کے حل کا خِطہ معلوم کریں۔

(i) $3x - 4y \leq 12$; $3x + 2y \geq 3$

(ii) $2x + y \leq 4$; $x + 2y \leq 6$

4۔ $g(x,y) = x + 4y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$x + y \leq 4$ ، $x \geq 0$ اور $y \geq 0$

5۔ $f(x,y) = 3x + 5y$ کی کم سے کم قیمت معلوم کریں۔ جب کہ

$x + 3y \geq 3$ ، $x + y \geq 2$ ، $x \geq 0$ ، $y \geq 0$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ 6

تکونیات (Trigonometry)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ڈگری اور ریڈین میں ظاہر کیے گئے زاویوں کی معیاری حالت کو پہچان سکیں۔
- قائمۃ الزاویہ مثلث میں حادہ زاویہ کے لیے sin، cosine اور tangent کی نسبتیں معلوم کرنے کے لیے مسئلہ فیثاغورث کا استعمال کر سکیں۔
- دو رُخی (2-D) شکل میں زاویہ نزول اور زاویہ صعود سے متعلقہ تکونیات کے عملی زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔
- تکونیات کی اکائیاں ثابت کر سکیں اور اُنہیں مختلف تکونیات کے روابط اخذ کرنے کے لیے لاگو کر سکیں۔
- تکونیات کی اکائیوں سے متعلقہ عملی زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

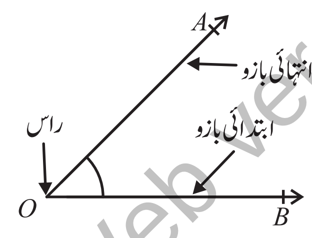
تعارف (Introduction)

تکونیات ریاضی کی ایک ایسی شاخ ہے جو مثلث کے زاویوں اور اضلاع کے روابط کو ظاہر کرتی ہے خصوصاً قائمۃ الزاویہ مثلث۔ بہت سے میدانوں میں اِس کا اہم کردار ہے جیسا کہ فزکس، انجینئرنگ، تعمیرات اور فلکیات۔ تکونیات کے تصورات کو عملی زندگی کے بہت سے مسائل جن میں زاویے اور فاصلے ہوں کو حل کر سکتے ہیں۔ جیسا کہ عمارات کی اونچائی، اشیا کے درمیان فاصلہ اور جہاز رانی کے لیے زاویے کی پیمائش وغیرہ کو معلوم کرنا۔

> **دماغی مشق!**
> جیومیٹری میں دو رُخی اشکال کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ اقلیدس (Euclidean) جیومیٹری کیا ہے؟

6.1 میعاری حالت میں زاویوں کی پہچان (ڈگری اور ریڈین)

(Identifying Angles in Standard Position (Degrees and Radians))



ایسی شکل جو دو شعاعوں کے ملنے سے بنتی ہو اور اُس کا ایک سرا مشترک ہو زاویہ کہلاتی ہے۔ دونوں شعاعیں زاویے کے بازو کہلاتی ہیں۔ مشترک سرا راس کہلاتا ہے۔ اِن شعاعوں کے گھومنے کی مقدار یا اِن کے درمیانی فاصلہ کی پیمائش زاویہ کہلاتی ہے۔ $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ دو شعاعیں ہیں اور AOB زاویہ ہے۔ جسے اس طرح لکھا جاتا ہے $\angle AOB$ یا $A\hat{O}B$ ۔

> **زاویوں کی اقسام ہیں:**
>
> | | |
> |---|---|
> | حادہ زاویہ | $0 < \theta < 90°$ |
> | منفرجہ زاویہ | $90° < \theta < 180°$ |
> | قائمہ زاویہ | $\theta = 90°$ |
> | زاویہ مستقیم | $\theta = 180°$ |
> | زاویہ معکوس | $180° < \theta < 360°$ |
> | مکمل گردش | $\theta = 360°$ |

زاویے کو میعاری حالت میں کہا جاتا ہے اگر:

(a) اِس کا نقطہ راس کارتیسی محدد میں مرکز پر واقع ہو۔

(b) اِس کی ایک شعاع (ابتدائی بازو) x-محور پر واقع ہو۔

(c) دوسری شعاع (انتہائی بازو) زاویے کی سمت کا تعین کرتی ہو۔

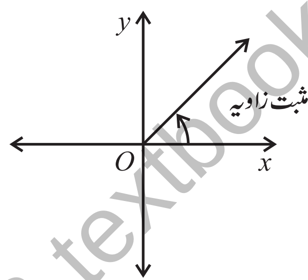
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

زاویے کی پیمائش ابتدائی بازو سے انتہائی بازو کی طرف کی جاتی ہے۔ اِس کو عموماً یونانی حروف θ، α، β، γ وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

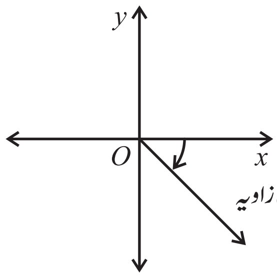
مثبت زاویہ

اگر انتہائی بازو کو گھڑی کی مخالف سمت میں ابتدائی بازو سے گھمایا جائے تو زاویہ مثبت ہو گا۔ دیا ہوا زاویہ پہلے ربع میں واقع ہے۔

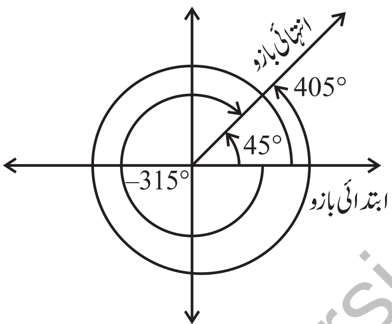


منفی زاویہ

اگر انتہائی بازو کو گھڑی کی سمت میں ابتدائی بازو سے گھمایا جائے تو زاویہ منفی ہو گا۔ دیا ہوا زاویہ چوتھے ربع میں واقع ہے۔



کوٹرمینل زاویے (Co-Terminal Angles)



کوٹرمینل زاویے ایسے زاویے ہوتے ہیں جن میں ابتدائی بازو اور انتہائی بازو معیاری حالت میں مشترک ہوں۔ لیکن اُن کی پیمائش مختلف ہو سکتی ہے۔ اِن زاویوں کا فرق $360°$ یا 2π ریڈین کا اضعاف ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر $45°$، $405°$ اور $-315°$ کوٹرمینل زاویے ہیں۔ کیوں کہ $405° = 45° + 360°$ اور $-315° = 45° - 360°$

6.1.1 ڈگری کی پیمائش (Degree Measurement)

ایک ڈگری ($°$) زاویوں کی پیمائش کی اکائی ہے۔ یہ ایک نقطہ کے گرد پورے چکر کا $\left(\frac{1}{360}\right)^{\text{th}}$ ہوتی ہے۔ سادہ الفاظ میں ڈگری ایک زاویے کی پیمائش ہے اور ایک مکمل دائرے میں $360°$ ہوتی ہیں۔

تاریخ کی نظر میں $360°$ کیوں؟

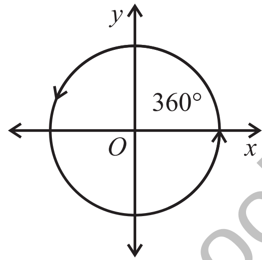
ایک دائرے کو 360 حصوں میں تقسیم کرنے کا انتخاب بیبولین کے زمانے سے ہے۔ جنہوں نے 60 کے اساس کے نظام کو استعمال کیا۔ وہ پہلے لوگوں میں شامل تھے جنہوں نے زاویے کی پیمائش کا تصور پیش کیا۔ 360 کو اس لیے منتخب کیا کیوں کہ وہ بہت بڑا مرکب عدد ہے (جو ... ,15 ,12 ,10 ,9 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 وغیرہ پر تقسیم ہو سکتا ہے) اور اِس کا حل آسان ہے۔ یہ نظام پرانے زمانے سے رائج رہا اور ڈگری کا تصور بہت سی تہذیبوں اور ریاضی کی روایات میں اہمیت اختیار کر گیا۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

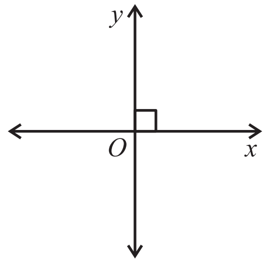
مکمل دائرہ

ایک مرکزی نقطہ کے گرد ایک مکمل گردش 360° کا زاویہ بناتی ہے۔



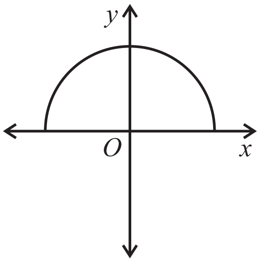
قائمہ زاویہ

ایک مکمل گردش کا ایک چوتھائی یا 90° کا زاویہ قائمہ زاویہ کہلاتا ہے۔



آدھا دائرہ (Half Circle)

ایک زاویہ مستقیم یا ایک مکمل گردش کے آدھے کی پیائش 180° ہوتی ہے۔ ڈگری کی پیائش کو مزید منٹ (′) اور سیکنڈ (″) میں تقسیم کیا گیا ہے۔



$1^\circ = 60'$ (60منٹ)

$1' = 60''$ (60سیکنڈ)

$1^\circ = 3600''$ (60 × 60سیکنڈ)

6.1.2 ڈگری سے منٹ اور سیکنڈ میں تبدیلی (Converting Degrees to Minutes and Seconds)

اعشاری ڈگری کو ڈگری، منٹ اور سیکنڈ (ڈی ایم ایس) میں تبدیل کرنے کے لیے درج ذیل اقدامات کیے جائیں گے:

- اعشاریہ والے عدد سے مکمل عدد (ڈگری) کو علیحدہ کریں۔
- اعشاریہ والے حصہ کے منٹ بنانے کے لیے 60 سے ضرب دیں۔
- حاصل ضرب کا مکمل عدد والا حصہ منٹ ہیں اور اعشاریہ والے حصہ کو مزید 60 سے ضرب دے کر سیکنڈ حاصل کریں۔

مثال 1: 73.12° کو ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں تبدیل کریں۔

حل: ڈگری: مکمل عددی حصہ $= 73^\circ$

منٹ: اعشاری حصہ (0.12) کو 60 سے ضرب دیں۔

$0.12 \times 60 = 7.2'$ ۔ مکمل عددی حصہ (منٹ) $= 7'$

سیکنڈ: اب اعشاری حصّہ 0.2 کو 60 سے ضرب دیں۔

$60 \times 0.2 = 12.0''$

پس $73.12^\circ = 73^\circ\ 7'\ 12''$

مثال 2: 109.42° کو ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں تبدیل کریں۔

حل: ڈگری: مکمل عددی حصہ $= 109^\circ$

منٹ: اعشاری حصہ (0.42) کو 60 سے ضرب دیں۔

$60 \times 0.42 = 25.2'$ ۔ مکمل عددی حصہ (منٹ) $= 25'$

سیکنڈ: اب اعشاری حصّہ 0.2 کو 60 سے ضرب دیں۔

$60 \times 0.2 = 12.0''$

پس $109.42^\circ = 109^\circ\ 25'\ 12''$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

6.1.3 ڈگری، منٹ اور سیکنڈ سے اعشاریہ ڈگری میں تبدیل کرنا
(Converting from Degrees, Minutes and Seconds to Decimal Degrees)

ڈگری، منٹ اور سیکنڈ (ڈی ایم ایس) سے اعشاری ڈگری میں تبدیل کرنے کے لیے درج ذیل اقدامات کیے جائیں گے۔

- ڈگری کو ایسے ہی لکھ دیں۔
- منٹ سے اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں: منٹوں کو 60 سے تقسیم کریں۔
- سیکنڈ سے اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں: سیکنڈوں کو 3600 سے تقسیم کریں۔
- تمام مقداروں کو جمع کریں۔

مثال 3: $45°45'45''$ کو اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں۔

حل: ڈگریاں: 45 رکھیں

منٹ سے اعشاری ڈگری میں تبدیلی: $\frac{45}{60} = 0.75$ ؛ سیکنڈ سے اعشاری ڈگری میں تبدیلی: $\frac{45}{3600} = 0.0125$

جمع کرنے سے: $45 + 0.75 + 0.0125 = 45.7625$

پس $45°45'45'' = 45.725°$

مثال 4: $94°27'54''$ کو اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں۔

حل: ڈگریاں: 94 رکھیں

منٹ سے اعشاری ڈگری میں تبدیلی: $\frac{27}{60} = 0.45$ ؛ سیکنڈ سے اعشاری ڈگری میں تبدیلی: $\frac{54}{3600} = 0.015$

جمع کرنے سے: $94 + 0.45 + 0.015 = 94.465$

پس $94°27'54'' = 94.465°$

6.1.4 دائروی پیمائش (ریڈین) (Circular Measure (Radian))

زاویوں کی پیمائش کا ایک دوسرا نظام ہے جسے دائروی پیمائش کہا جاتا ہے۔ ریڈین جس کی علامت "rad" ہے اکائیوں کے بین الاقوامی نظام (SI) میں زاویے کی اکائی ہے اور یہ زاویے کی پیمائش کی بنیادی اکائی ہے جو ریاضی کی بہت سی شاخوں میں استعمال کی جاتی ہے۔ خاص طور پر تکونیات میں "ریڈین" زاویے کی پیمائش کی اکائی ہے۔ کسی ایسی قوس کے ذریعے دائرے پر مرکز پر بنا ہوا زاویہ جس کی پیمائش اُس دائرے کے رداس کے برابر ہو "ریڈین" کہلاتی ہے۔ ڈگری کے برعکس جس میں دائرے کو 360 برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ موروثی طور پر ریڈین کا تعلق دائرے کی جیومیٹری اور قوس کی لمبائی سے ہے۔

ریڈین کا تاریخی پس منظر:

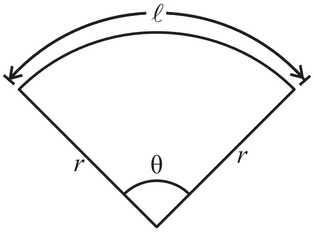
ریڈین میں پیمائش کا تصور ریاضی دانوں نے پہلی دفعہ اٹھارویں صدی میں پیش کیا۔ اِس کے پیچھے بہت پہلے اقلیدس (Euclid) اور ارشمیدس (Archimedes) نے اصول پیش کر دیا تھا۔ لفظ ریڈین کو دائرے کے رداس سے اخذ کیا گیا ہے۔ چوں کہ ریڈین بنیادی طور پر قوس کی لمبائی اور رداس کی نسبت ہے۔ سب سے پہلے سکاٹ لینڈ کے ریاضی دان "جمیز تھومسن (James Thomson)" نے 1873 میں زاویے کی پیمائش کے لیے لفظ ریڈین کا استعمال کیا۔ اُس کے بھائی ولیم تھومسن (William Thomson) جو کہ لارڈ کیلون (Lord Kelvin) کے نام سے جانا جاتا ہے اور طبعیات کا ماہر تھا دونوں ریڈین کی بنیادی ایجاد سے ذاتی طور پر متاثر تھے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

اگر کسی دائرے کا رداس "r" ہو اور قوس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر ہو تو اُس قوس کے ذریعے بنا ہوا زاویہ θ ایک ریڈین ہو گا۔

$$\theta = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad} \qquad \left(\because \quad \theta = \frac{\text{قوس کی لمبائی}}{\text{رداس}} = \frac{\ell}{r}\right)$$



ایک مکمل دائرے میں قوس کی لمبائی محیط ($2\pi r$) کے برابر ہوتی ہے۔ اِس سے مراد:

- مکمل دائرے کے لیے بنا ہوا زاویہ (مکمل گردش) 2π ریڈین یا $360°$ ہوتا ہے۔
- اس لیے $1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57.2958^\circ$ اور
- $1^\circ = \frac{2\pi}{360} = 0.01745 \text{ rad}$

ڈگری اور ریڈین کے درمیان تبدیلی:

ریڈین سے ڈگری: $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}$ ڈگری

ڈگری سے ریڈین: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

مثال 5: ریڈین سے ڈگری میں تبدیل کریں:

(i) $\frac{5\pi}{3}$ rad (ii) $\frac{7\pi}{6}$ rad (iii) $\frac{11\pi}{6}$ rad (iv) 1.2 rad

حل:

(i) $\frac{5\pi}{3} \text{ rad} = \frac{5\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ \qquad (\because 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi})$

(ii) $\frac{7\pi}{6} \text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$

(iii) $\frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 330^\circ$

(iv) $1.2 \text{ rad} = 1.2 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 68.75^\circ \qquad (\because \pi = 3.14159)$

مثال 6: ڈگری سے ریڈین میں تبدیل کریں۔

(i) 15° (ii) 75° (iii) 315° (iv) $15^\circ\, 15'$

حل:

(i) $15^\circ = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ rad یا 0.262 rad

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

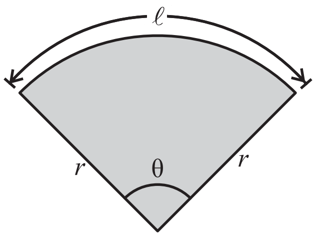
$$75^\circ = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}\ \text{rad} \quad \text{یا} \quad 1.309\ \text{rad} \qquad \text{(ii)}$$

$$315^\circ = 315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}\ \text{rad} \quad \text{یا} \quad 5.498\ \text{rad} \qquad \text{(iii)}$$

$$15^\circ\ 15' = 15^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ = 15.25^\circ = 15.25 \times \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = 0.266\ \text{rad} \qquad \text{(iv)}$$

چکر	1 چکر	$\frac{1}{2}$ چکر	$\frac{1}{4}$ چکر	$\frac{1}{6}$ چکر	$\frac{1}{8}$ چکر	$\frac{1}{12}$ چکر	0 چکر
ریڈینز	2π rad	π rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	0 rad
ڈگریاں	360°	180°	90°	60°	45°	30°	0°

قوس کی لمبائی اور علاقہ کا رقبہ (Arc Length and Area of Sector)



اگر 'r' رداس ہو اور 'ℓ' لمبائی کی قوس کے ذریعے بنایا گیا زاویہ θ (ریڈین) ہو۔

تو $\quad$ علاقہ کی قوس کی لمبائی $= \ell = r\theta$

اور $\quad$ علاقہ کا رقبہ $= A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ:

$$\ell = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$= \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r \qquad (2\pi\ \text{rad} = 360^\circ)$$

$$= r\theta$$

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ:

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 \qquad (2\pi\ \text{rad} = 360^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \theta$$

پس قوس کی لمبائی $\ell = r\theta$ اور علاقہ کا رقبہ $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

مثال 7: ایک علاقہ کی قوس کی لمبائی معلوم کریں اگر رداس 10 cm اور مرکزی زاویہ $\theta = 60^\circ$ ہو۔

حل: $\theta = 60^\circ$ کو ریڈین میں تبدیل کریں: $\theta = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad

$$\ell = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{3} \approx 10.47\ \text{cm}$$

قوس کی لمبائی تقریباً 10.47 cm ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 8: ایک علاقہ کا رقبہ معلوم کریں جس میں رداس $r = 8$ cm اور مرکزی زاویہ $\theta = 45°$ ہے۔

حل: $\theta = 45°$ کو ریڈین میں تبدیل کرتے ہیں: $\theta = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ rad

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}\times 8^2 \times \frac{\pi}{4} = 8\pi \text{ cm}^2 \approx 25.12 \text{ cm}^2$$

پس علاقہ کا رقبہ تقریباً 25.12 cm^2 ہے۔

مثال 9: اگر کسی علاقہ میں قوس کی لمبائی 11 cm اور رداس 5 cm ہو تو قوس کے ذریعے بنائے گئے مرکزی زاویہ کی مقدار ریڈین اور ڈگری میں معلوم کریں۔

حل: $\theta = ?$ ؛ $\ell = 11$ cm ؛ $r = 5$ cm

$$\therefore \quad \ell = r\theta$$

$$11 = 5\theta \quad \Rightarrow \theta = \frac{11}{5} = 2.2 \text{ rad}$$

$$\theta = 2.2 \times \frac{180°}{\pi} \approx 126.1°$$

پس قوس کے ذریعے بنائے گئے زاویے کی مقدار ریڈین میں 2.2 rad اور ڈگری میں $126.1°$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

مشق 6.1

1۔ درج ذیل زاویے کون سے ربع میں واقع ہیں اور ہر ایک زاویے کے لیے اُس کا کوٹرمینل زاویہ لکھیں:

(i) $65°$　(ii) $135°$　(iii) $-40°$　(iv) $210°$　(v) $-150°$

2۔ درج ذیل کو ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں تبدیل کریں:

(i) $123.456°$　(ii) $58.7891°$　(iii) $90.5678°$

3۔ درج ذیل کو اعشاری ڈگری میں تبدیل کریں:

(i) $65° 32' 15''$　(ii) $42° 18' 45''$　(iii) $78° 45' 36''$

4۔ درج ذیل کو ریڈین میں تبدیل کریں:

(i) $36°$　(ii) $22.5°$　(iii) $67.5°$

5۔ درج ذیل کو ڈگری میں تبدیل کریں:

(i) $\frac{\pi}{16}$ rad　(ii) $\frac{11\pi}{5}$ rad　(iii) $\frac{7\pi}{6}$ rad

6۔ قوس کی لمبائی اور علاقہ کا رقبہ معلوم کریں اگر:

(i) $r = 6$ cm اور مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{3}$ ریڈین

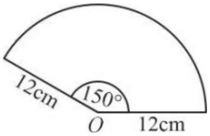
(ii) $r = \frac{4.8}{\pi}$ cm اور مرکزی زاویہ $\frac{5\pi}{6}$ ریڈین

NOT FOR SALE-PESRP

7۔ اگر علاقہ کے مرکزی زاویہ کی مقدار 60° اور رداس 12 cm ہو تو اُس علاقہ کا رقبہ معلوم کریں اور یہ دائرے کے کُل رقبہ کا کتنا ہو گا؟

8۔ اُس علاقہ کے رقبے کی فی صد معلوم کریں جس کا مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{8}$ ریڈین ہو۔

9۔ ایک دائروی علاقہ جس کا رداس 12 cm ہے اور مرکزی زاویہ 150° ہے۔ اس علاقے کو کاٹا گیا اور اُس سے ایک کون بنائی گئی۔ اُس کون کی ترچھی اُونچائی اور قاعدے کا رداس معلوم کریں۔



اشارہ: علاقے کی قوس کی لمبائی = کون کا محیط

6.2 تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios)

ایسے تفاعل جو کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں زاویوں اور اضلاع کے تعلق کو ظاہر کریں تکونیاتی تفاعل (Sine, Cosine, Tangent) وغیرہ کہلاتے ہیں اسکی ترقی کی جڑیں انڈین اور اسلامک ریاضی سے ہوتی ہوئی قدیم جیومیٹری تک ملتی ہیں اور اِس نے نشاۃ ثانیہ (Renaissance) کے دوران یورپ میں باضابطہ شکل اختیار کی۔ آج یہ تفاعل کا نظریہ اطلاقی سائنس میں ناگزیر ضرورت بن چکا ہے۔ اب تکونیات سائنس کی بہت سی شاخوں میں جیسا کہ فزکس میں (خاص طور پر ویو تھیوری، انجینئرنگ اور کمپیوٹر گرافک) اس کا استعمال بڑے پیمانے پر کیا جاتا ہے۔

cosine ،sin اور tangent کی تاریخ

Nicaea (c. 190 – 120 BC) کا Hipparchus کو "تکونیات کا باپ" سمجھا جاتا ہے۔ وہ پہلا شخص تھا جس نے وتر (chord) کے افعال کا استعمال کرتے ہوئے فلکیات سے متعلق مسائل کو حل کرنے کے لیے ایک مثلثی جدول مرتب کیا۔ **Hipparchus** نے ایک دائرے کو 360 برابر حصوں میں تقسیم کیا اور اس نظام کو زاویوں کی پیائش کے لیے استعمال کیا اور ہر حصہ ایک ڈگری کہلاتا ہے۔

اسلامی سنہری دور میں، البطانی **Al-Battani** (c. 858 – 929 CE) پہلے لوگوں میں سے تھا جنہوں نے وتر کے افعال کو جدید تفاعل سے تبدیل کیا اور **sine** اور **tangent** کے حسابی جدولوں کو بنایا۔

الخوارزمی **Al-Khwarizmi** (c. 780–850 CE)، جو الجبرا میں اپنے کام کے لیے جانا جاتا ہے، اور عمر خیام (c. 1048 – 1131 CE) نے کروی تکونیات پر کام کیا، جس کا فلکیات میں اطلاق ہوتا ہے۔

آئزک نیوٹن اور گوٹ فرائیڈ ولہیم لیبنز (Isaac Newton and Gottfried Wilhelm) (17ویں صدی) نے کیلکولس تیار کیا، جس نے ریاضی کے مزید تجریدی شعبوں میں جیومیٹری سے ہٹ کر تکونیاتی افعال کے استعمال کو مزید وسعت دی۔

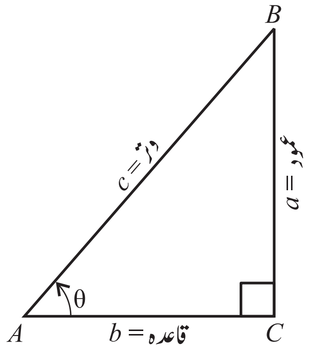
تکونیاتی نسبتوں کا اطلاق (Application of Trigonometric Ratios)

جب ہم کسی کتاب کی موٹائی، پنسل کی لمبائی، کرسی کی اونچائی یا کمرہ جماعت کی لمبائیاں کسی پیمانے یا فیتے کے ذریعے ماپتے ہیں تو یہ براہ راست پیمائش کہلاتی ہے۔ کچھ حالتوں میں براہ راست پیمائش ممکن نہیں ہوتی۔ کیوں کہ یہ مشکل اور خطرناک ہوتی ہیں۔ مثلاً جھنڈے کے پول کے اوپر چڑھ کر اُس کی اونچائی معلوم کرنا بہت مشکل ہے۔ کسی چوٹی کی اونچائی معلوم کرنا بھی بہت مشکل اور خطرناک ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

اس طرح کے مسائل کو ہم تکونیات کی مدد سے بالواسطہ پیمائش کے طریقے سے حل کر سکتے ہیں۔ کسی فاصلے یا اُونچائی کی بالواسطہ پیمائش کے لیے یہ انتہائی کار آمد ہے۔ اِس کا سروے، جہاز رانی، انجینئرنگ اور فزیکل سائنس کی بہت سی شاخوں میں بھی اہم کردار ہے۔ تکونیات کے اِن تصورات کو ان مضامین میں مسائل حل کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

6.2.1 ایک حادہ زاویے کی تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios of an Acute Angle)



کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں تکونیاتی نسبتوں کا اطلاق حادہ زاویہ پر ہوتا ہے۔ لیکن اس تصور کو 90° سے بڑے زاویے کے لیے ریاضی کے بہت سے شعبوں اور سائنس میں استعمال کیا جاتا ہے۔

فرض کریں حادہ زاویہ θ کے لحاظ سے قائمۃ الزاویہ مثلث ACB ہے۔

$m\angle ACB = 90^\circ$ کے ساتھ $\theta = m\angle CAB$ (تھیٹا)

مثلث ACB میں ضلع BC عمود جو کہ زاویہ θ کا مخالف ضلع ہے۔ ضلع CA قاعدہ اور ضلع AB وتر کہلاتا ہے۔

فرض کریں کہ $m\overline{BC} = a$ ، $m\overline{AC} = b$ اور $m\overline{AB} = c$ اِس قائمۃ الزاویہ مثلث ACB میں زاویہ θ کے لحاظ سے تکونیاتی نسبتیں درج ذیل ہیں:

$$\sin\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c} \quad : \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c} \quad : \quad \sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{a}{b} \quad : \quad \cot\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \frac{b}{a}$$

قائمۃ الزاویہ مثلث ACB میں چھے تکونیاتی نسبتیں Sine(sin)، cosine (cos)، Tangent(tan)، Cosecant (cosec یا csc)، Secant (sec) اور Cotangent(cot) ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں

$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$= \frac{a/c}{b/c} \quad \text{(c سے تقسیم کرنے سے)}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

اِسی طرح

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

ہم دیکھتے ہیں:

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{(i)}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{(ii)}$$

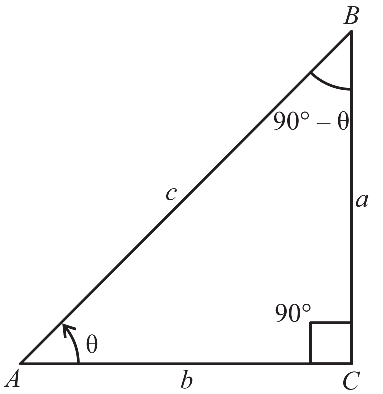
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{(iii)}$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

6.2.2 کمپلیمنٹری زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں
(Trigonometric Ratios of Complementary Angles)

ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ACB جس میں $m\angle A = \theta$ ، $m\angle C = 90^\circ$ اور $m\angle B = 90^\circ - \theta$ زاویہ B کی تکونیاتی نسبتیں استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ



$$\sin\, m\angle B = \sin(90^\circ - \theta) = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \frac{b}{c} \quad \ldots(i)$$

زاویہ A کی تکونیاتی نسبتیں استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\cos\, m\angle A = \cos\theta = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \frac{b}{c} \quad \ldots(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\boxed{\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta}$$

اسی طرح، ہمارے پاس ہے:

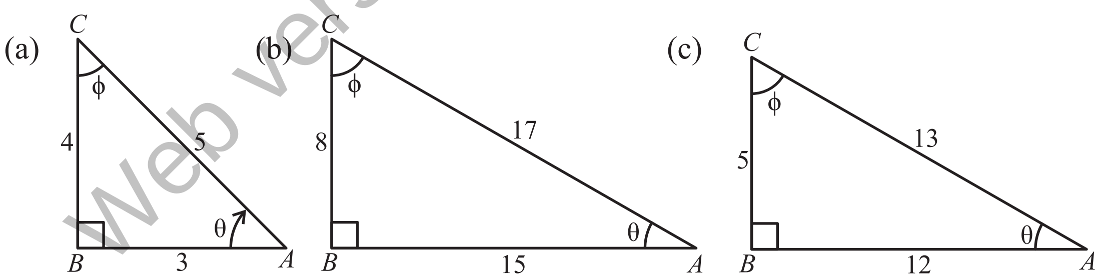
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \quad ; \quad \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta \quad ; \quad \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$$
$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta \quad ; \quad \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$

مشق 6.2

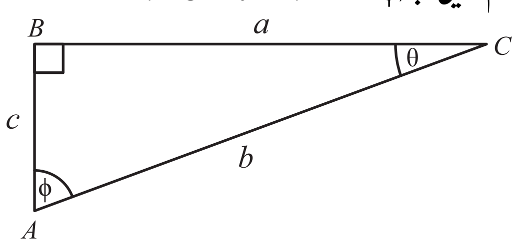
1۔ درج ذیل قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں سے ہر ایک کے لیے تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔

(i) $\sin\theta$ (ii) $\cos\theta$ (iii) $\tan\theta$ (iv) $\sec\theta$ (v) $\operatorname{cosec}\theta$

(vi) $\cot\phi$ (vii) $\tan\phi$ (viii) $\operatorname{cosec}\phi$ (ix) $\sec\phi$ (x) $\cos\phi$



2۔ درج ذیل قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں جبکہ $m\angle A = \phi$ اور $m\angle C = \theta$۔



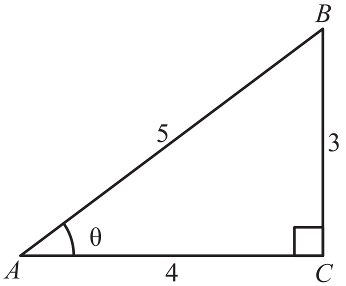
(i) $\sin\theta$ (ii) $\cos\theta$

(iii) $\tan\theta$ (iv) $\sin\phi$

(v) $\cos\phi$ (vi) $\tan\phi$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



3۔ دی گئی شکل سے درج ذیل ثابت کریں۔

(i) $\sin\theta \ \text{cosec}\,\theta = 1$

(ii) $\cos\theta \ \sec\theta = 1$

(iii) $\tan\theta \ \cot\theta = 1$

4۔ خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) =$ ____________

(ii) $\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) =$ ____________

(iii) $\tan 30^\circ = \tan(90^\circ - 60^\circ) =$ ____________

(iv) $\tan 60^\circ = \tan(90^\circ - 30^\circ) =$ ____________

(v) $\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) =$ ____________

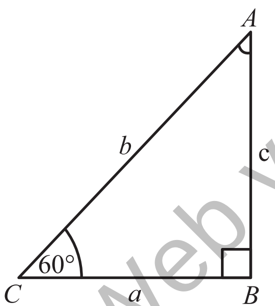
(vi) $\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) =$ ____________

(vii) $\sin 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) =$ ____________

(viii) $\tan 45^\circ = \tan(90^\circ - 45^\circ) =$ ____________

(ix) $\cos 45^\circ = \cos(90^\circ - 45^\circ) =$ ____________

5۔ قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle B = 90^\circ$ اور C ایک حادہ زاویہ ہے جس کی مقدار 60° ہے۔ مزید $\sin m\angle A = \dfrac{a}{b}$ تو درج ذیل تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔



(i) $\dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}}$　　(ii) $\cos 60^\circ$

(iii) $\tan 60^\circ$　　(iv) $\text{cosec}\,\dfrac{\pi}{3}$

(v) $\cot 60^\circ$　　(vi) $\sin 30^\circ$

(vii) $\cos 30^\circ$　　(viii) $\tan\dfrac{\pi}{6}$

(ix) $\sec 30^\circ$　　(x) $\cot 30^\circ$

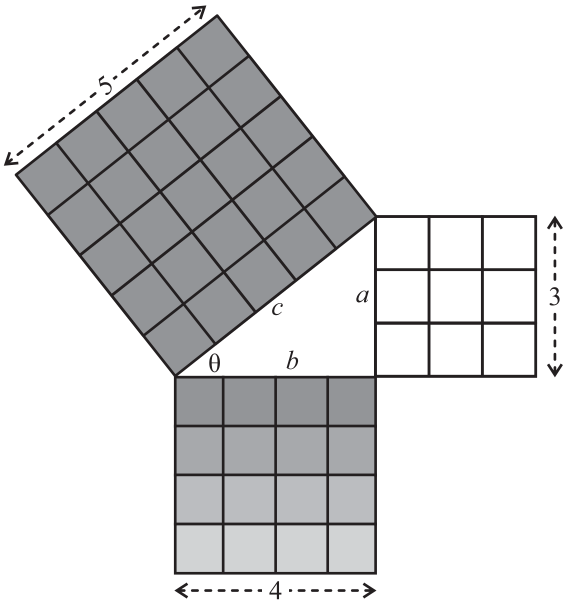
6.3 تکونیاتی اکائیاں (Trigonometric Identities)

بنیادی تکونیاتی اکائیاں (Fundamental Trigonometric Identities)

ہم کچھ تکونیاتی بنیادی اکائیوں کا تذکرہ کریں گے جو تکونیات میں استعمال ہوتی ہیں۔ اِن بنیادی اکائیوں کی جیومیٹری میں اصل بنیاد مسئلہ فیثا غورث ہے۔ ”قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع باقی دو اضلاع کی مقداروں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔“

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$

دی ہوئی شکل میں عمود کی لمبائی "a" قاعدہ کی لمبائی "b"

اور وتر کی لمبائی "c" کے برابر ہو تو مسئلہ غورث کی رو سے

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2} \quad \ldots(i)$$

طرفین کو c^2 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \quad \ldots(ii)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

طرفین کو b^2 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta} \quad \ldots(iii)$$

طرفین کو a^2 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\boxed{1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta} \quad \ldots(iv)$$

اکائیاں (ii)، (iii) اور (iv) مسئلہ فیثا غورث کی اکائیاں کہلاتی ہیں۔

مثال 10: ثابت کریں: $(\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta = \sin^2\theta$

حل:

$$\text{L.H.S} = (\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta$$

$$= \tan^2\theta \cdot \cos^2\theta \qquad (\because\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta \qquad \left(\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \sin^2\theta = \text{R.H.S}$$

پس $(\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta = \sin^2\theta$

مثال 11: ثابت کریں: $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\ \text{cosec}\,\theta$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل:

L.H.S = tan θ + cot θ

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta\cdot\sin\theta + \cos\theta\cdot\cos\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S.}$$

پس $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

مثال 12: ثابت کریں: $\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} - \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$

حل:

$$\text{L.H.S} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta-1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\text{R.H.S} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

پس L.H.S = R.H.S

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

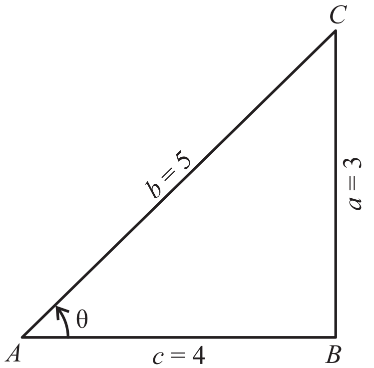
مثال 13: ثابت کریں: $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

حل:

$$\begin{aligned} L.H.S &= \sin^6\theta + \cos^6\theta \\ &= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3 \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^4\theta + \cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta) \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = R.H.S \end{aligned}$$

پس　$\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

مثال 14: اگر $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ہو تو باقی تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں جب کہ θ پہلے ربع میں واقع ہوں۔



حل: دیا گیا ہے: $\tan\theta = \frac{3}{4} = \frac{a}{c}$

جب کہ: $a = 3,\ c = 4$

مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$b^2 = a^2 + c^2$$
$$= 9 + 16 = 25$$
$$\Rightarrow \quad b = 5$$

اس لیے

$$\sin\theta = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \text{coses}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \sec\theta = \frac{b}{c} = \frac{5}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

مشق 6.3

1۔ اگر θ پہلے ربع میں ہے تو θ کی باقی تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔

(i) $\sin\theta = \frac{2}{3}$　　(ii) $\cos\theta = \frac{3}{4}$　　(iii) $\tan\theta = \frac{1}{2}$

(iv) $\sec\theta = 3$　　(v) $\cot\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

درج ذیل تکونیاتی اکائیوں کو ثابت کریں:

2۔ $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

3۔ $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$

4۔ $\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$

5۔ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

6۔ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

7۔ $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

8۔ $(\sec\theta - \tan\theta)^2 = \dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

9۔ $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta$

10۔ $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

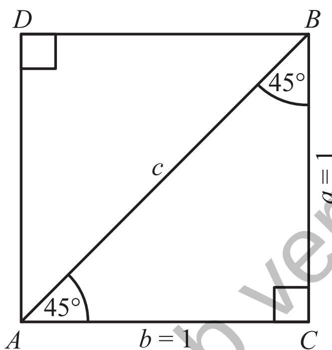
11۔ $\sin^3\theta - \cos^3\theta = (\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)$

12۔ $\sin^6\theta - \cos^6\theta = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 - \sin^2\theta\cos^2\theta)$

6.4 مخصوص زاویوں کی تکونیاتی نسبتوں کی مقداریں

(Values of Trigonometric Ratios of Special Angles)

$45^\circ\left(\dfrac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$ کی تکونیاتی نسبتیں



ایک ایسا مربع $ACBD$ لیں جس کے ضلع کی لمبائی ایک اکائی ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ وتر زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔ اس لیے مثلث ABC میں

$m\angle A = m\angle B = 45^\circ$ اور $m\angle C = 90^\circ$

مثلث ABC میں مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 1 + 1$$
$$c^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2}$$

تکونیاتی نسبتیں:

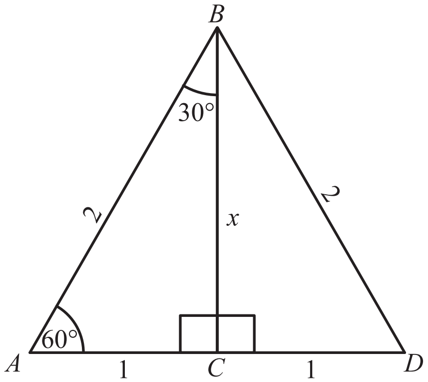
$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sec 45^\circ = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{b} = 1 \quad ; \quad \cot 45^\circ = \frac{b}{a} = 1$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



$30°\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$ اور $60°\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$ کی تکونیاتی نسبتیں

ایک ایسی مساوی الاضلاع مثلث لیں جس میں اُس کے ضلع کی لمبائی 2 اکائی ہو۔

ضلع AD پر BC عمودی ناصف کھینچا۔ نقطہ C ضلع AD کا درمیانی نقطہ ہے۔

اِس لیے $m\overline{AC} = m\overline{CD}$ جس میں

$m\angle BAC = 60°$ ، $m\angle ABC = 30°$ اور $m\angle ACB = 90°$

فرض کریں $m\overline{BC} = x$ اکائیاں

مثلث ABC میں مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$2^2 = 1^2 + x^2$$

$$x^2 = 4 - 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}\ (m\overline{BC} = \sqrt{3} \text{ اکائیاں})$$

$30°\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$ کی تکونیاتی نسبتیں

قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle B = 30°$

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \quad ; \quad \text{cosec } 30° = 2$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \cot 30° = \sqrt{3}$$

$60°\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$ کی تکونیاتی نسبتیں

قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle A = 60°$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos 60° = \frac{1}{2} \quad ; \quad \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \sec 60° = 2 \quad ; \quad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جدول میں اِن نتائج کو ایسے لکھا جاتا ہے۔

θ	0°	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

مشق 6.4

1۔ کیلکولیٹر کے استعمال کے بغیر درج ذیل تکونیاتی نسبتوں کی مقداریں معلوم کریں۔

(i) $\sin 30°$ (ii) $\cos 30°$ (iii) $\tan\frac{\pi}{6}$ (iv) $\tan 60°$

(v) $\sec 60°$ (vi) $\cos\frac{\pi}{3}$ (vii) $\cot 60°$ (viii) $\sin 60°$

(ix) $\sec 30°$ (x) $\operatorname{cosec} 30°$ (xi) $\sin 45°$ (xii) $\cos\frac{\pi}{4}$

2۔ پڑتال کریں:

(i) $2\sin 60° \cos 60°$ (ii) $2\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}$

(iii) $2\sin 45° + 2\cos 45°$ (iv) $\sin 60°\cos 30° + \cos 60°\sin 30°$

(v) $\cos 60°\cos 30° - \sin 60°\sin 30°$ (vi) $\sin 60°\cos 30° - \cos 60°\sin 30°$

(vii) $\cos 60°\cos 30° + \sin 60°\sin 30°$ (viii) $\tan\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6} + 1$

3۔ اگر $\sin\frac{\pi}{4}$ اور $\cos\frac{\pi}{4}$ کی قیمت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہو تو درج ذیل مقداریں معلوم کریں۔

(i) $2\sin 45° - 2\cos 45°$ (ii) $3\cos 45° + 4\sin 45°$

(iii) $5\cos 45° - 3\sin 45°$

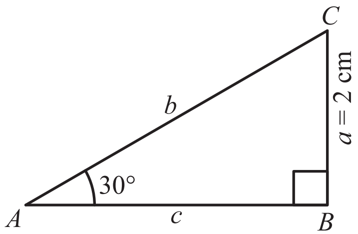
6.5 مثلث کا حل (Solution of a Triangle)

ہم جانتے ہیں کہ کسی مثلث میں تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔ اِن چھے اجزا میں سے اگر ہمیں تین مقداریں جس میں کم از کم ایک ضلع معلوم ہو تو پھر ہم باقی مقداریں معلوم کر سکتے ہیں۔

باقی اجزا کی مقداریں معلوم کرنا مثلث کا حل کہلاتا ہے یہاں ہم صرف قائمۃ الزاویہ مثلث کو حل کرنا سیکھیں گے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook



پہلی صورت: جب ایک ضلع اور ایک زاویہ کی مقدار دی گئی ہو۔

مثال 15: مثلث ABC حل کیجیے جس میں $m\angle B = 90°$ ، $m\angle A = 30°$ اور $a = 2$ cm

حل: ہمیں b، c اور $m\angle C$ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

تو

$$m\angle C = m\angle B - m\angle A$$
$$= 90° - 30°$$
$$= 60° \qquad \ldots(i)$$

$$\frac{a}{b} = \sin 30°$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{b} = \sin 30° \qquad (\because a = 2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \qquad \left(\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad b = 4 \text{ cm} \qquad \ldots(ii)$$

اور

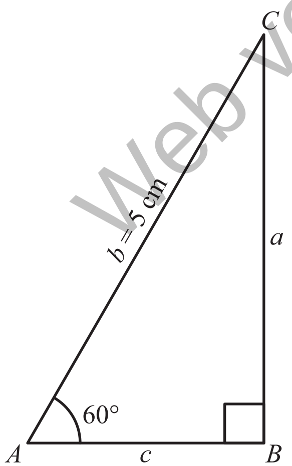
$$\frac{a}{c} = \tan 30°$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \left(\because a = 2, \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

پس

$$c = 2\sqrt{3} \text{ cm} \qquad \ldots(iii)$$

پس (i)، (ii) اور (iii) مطلوبہ نتائج ہیں۔



دوسری صورت: جب ایک وتر اور ایک زاویہ دیا گیا ہو۔

مثال 16: مثلث ABC حل کریں جب $m\angle A = 60°$ ، $b = 5$ cm اور $m\angle B = 90°$

حل: ہمیں a، c اور $m\angle C$ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

$$m\angle A = 60°$$
$$m\angle B = 90°$$
$$m\angle C = m\angle B - m\angle A$$
$$= 90° - 60°$$
$$= 30° \qquad \ldots(i)$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

اب $\dfrac{a}{b} = \sin 60^\circ$

$\dfrac{a}{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \left(\because b = 5, \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad a = 4.33 \text{ cm} \quad \ldots\text{(ii)}$

اور $\dfrac{c}{b} = \cos 60^\circ$

$\dfrac{c}{5} = \dfrac{1}{2} \qquad \left(\because b = 5,\ \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad c = \dfrac{5}{2}$

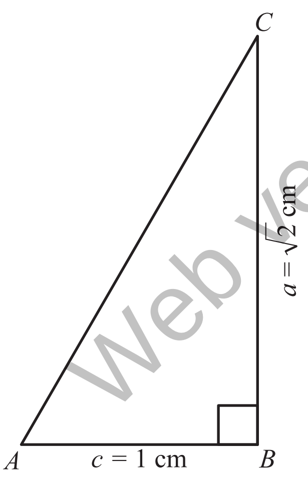
$\Rightarrow \quad c = 2.5 \text{ cm} \quad \ldots\text{(iii)}$

پس(i)، (ii)اور(iii)مطلوبہ نتائج ہیں۔

تیسری صورت: جب دو اضلاع کی مقداریں دی گئی ہوں۔

مثال17: مثلث ABC حل کریں جب کہ $a = \sqrt{2}$ cm، $c = 1$ cm اور $m\angle B = 90^\circ$

حل: ہمیں b، $m\angle A$ اور $m\angle C$ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔



مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$b^2 = c^2 + a^2$

یا $\quad b^2 = (1)^2 + (\sqrt{2})^2$

یا $\quad b^2 = 1 + 2$

یا $\quad b^2 = 3$

یا $\quad b = \sqrt{3} \text{ cm} \quad \ldots\text{(i)}$

اب $\sin m\angle A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow m\angle A = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} = 54.7^\circ$

$\Rightarrow \quad m\angle A = 54.7^\circ \quad \ldots\text{(ii)}$

اور $\quad m\angle C = m\angle B - m\angle A$

$= 90^\circ - 54.7^\circ$

$= 35.3^\circ \quad \ldots\text{(iii)}$

پس(i)، (ii)اور(iii)مطلوبہ نتائج ہیں۔

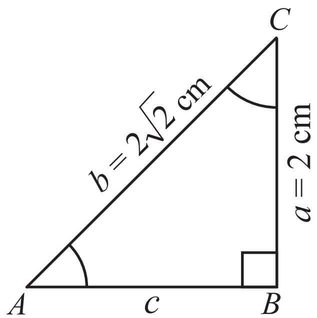
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

چوتھی صورت: جب ایک وتر اور ایک ضلع کی مقدار دی گئی ہو۔

مثال 18: مثلث ABC حل کریں جب کہ $a = 2\text{ cm}$ ، $b = 2\sqrt{2}\text{ cm}$ اور $m\angle B = 90^\circ$

حل: ہمیں $m\angle A$ ، $m\angle C$ اور c معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔



مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$b^2 = a^2 + c^2$$

یا $$c^2 = b^2 - a^2$$

$$= (2\sqrt{2})^2 - (2)^2$$

$$= 8 - 4 = 4$$

یا $$c = 2\text{ cm} \quad \ldots(i)$$

اب $$\frac{c}{b} = \cos m\angle A$$

یا $$\frac{c}{b} = \cos m\angle A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow m\angle A = 45^\circ \quad \ldots(ii)$$

پس $$m\angle C = m\angle B - m\angle A$$

$$= 90^\circ - 45^\circ$$

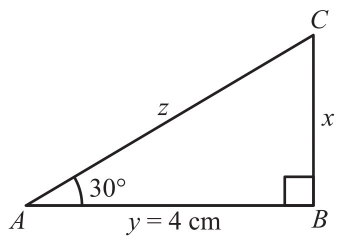
$$= 45^\circ \quad \ldots(iii)$$

پس (i)، (ii) اور (iii) مطلوبہ نتائج ہیں۔

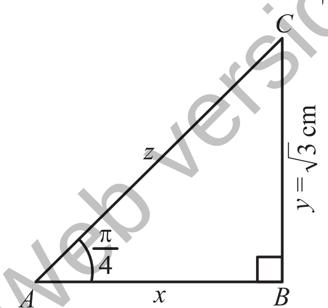
مشق 6.5

1۔ درج ذیل باقاعدہ قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں x، y ، z کی مقداریں معلوم کریں۔

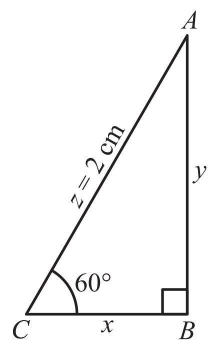
(i)



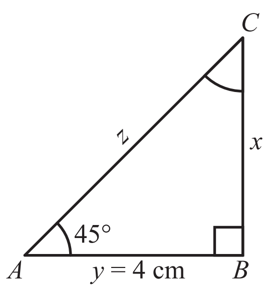
(ii)



(iii)



(iv)

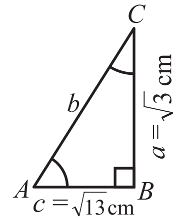


NOT FOR SALE-PESRP

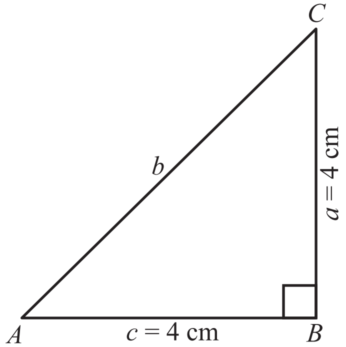
Web version of PCTB textbook

2۔ درج ذیل مثلثوں کے نامعلوم اضلاع اور زاویے معلوم کریں۔

(i)



(ii)



3۔ ایک مربع کھیت کے ہر ضلع کی لمبائی 60 میٹر ہے اُس کھیت کے وتروں کی مقداریں معلوم کریں۔

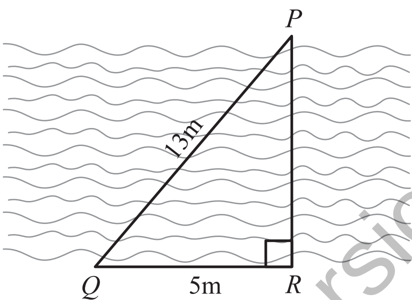
4۔ درج ذیل مثلثوں کو حل کریں جب کہ $m\angle B = 90°$:

(i) $m\angle C = 60°,\ c = 3\sqrt{3}$ cm (ii) $m\angle C = 45°,\ a = 8$ cm

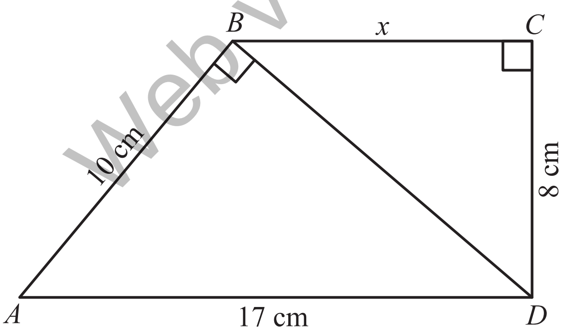
(iii) $a = 12$ cm, $c = 6$ cm (iv) $m\angle A = 60°,\ c = 4$ cm

(v) $m\angle A = 30°,\ c = 4$ cm (vi) $b = 10$ cm, $a = 6$ cm

5۔ فرض کریں Q اور R دو نقاط نہر کے ایک ہی کنارے پر واقع ہے۔ ایک اور نقطہ P نقطہ R کی سیدھ میں دوسرے کنارے پر لیا گیا ہے۔ نہر کی چوڑائی معلوم کریں اور زاویہ PQR کی مقدار ریڈین میں معلوم کریں۔



6۔ سامنے دی گئی شکل میں x کی لمبائی معلوم کریں۔

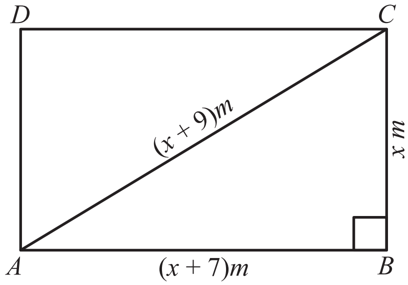


7۔ ایک سیڑھی دیوار کے ساتھ اِس طرح کھڑی کی گئی ہے کہ اُس کا پایا دیوار سے 2 میٹر کے فاصلے پر ہے اگر سیڑھی کی لمبائی 8 میٹر ہو تو دیوار کی بلندی معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

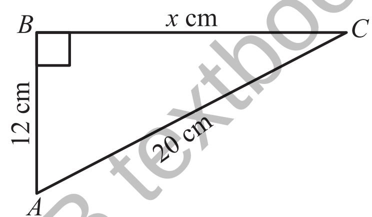
NOT FOR SALE-PESRP

8۔ ایک مستطیلی کھیت کا وتر $(x+9)$ m اور اضلاع $(x+7)$ m اور x m ہیں۔ x کی قیمت معلوم کریں۔

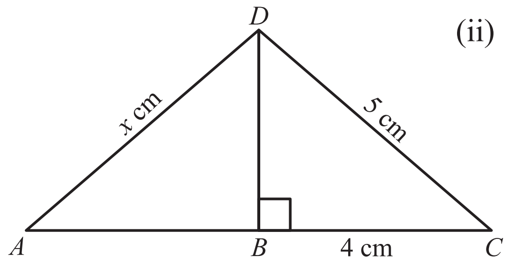


9۔ ہر ایک جزو میں x کی قیمت معلوم کریں۔

(i)



(ii)

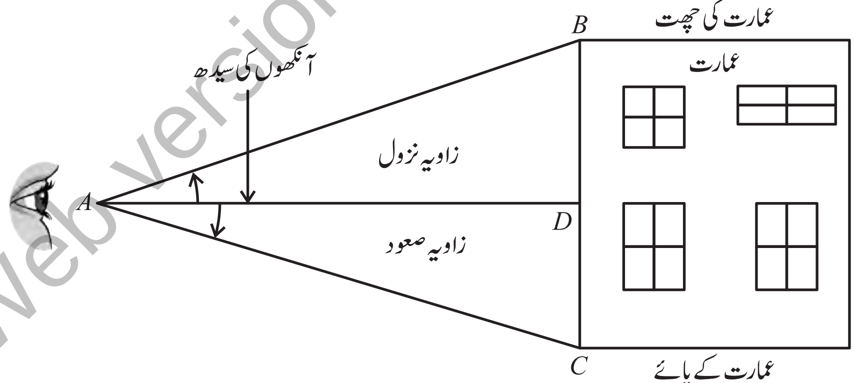


$m\overline{AB} = m\overline{BC}$

6.6 زاویہ صعود اور زاویہ نزول

(The Angle of Elevation and the Angle of Depression)

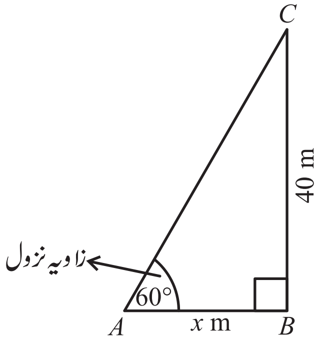
کسی افقی خط AD (آنکھ کی سیدھ) اور نقطہ A (آنکھ) سے عمارت کی چھت تک کھینچے گئے خط AB کے درمیان زاویہ نزول کہلاتا ہے۔



کسی افقی خط AD (آنکھ کی سیدھ) اور نقطہ A (آنکھ) سے عمارت کی بنیاد تک کھینچے گئے خط AC کے درمیان زاویہ صعود کہلاتا ہے۔

مثال 19: جب زمین کی سطح کے کسی نقطہ سے 40 m اونچے ستون کے اوپر والے سرے کو دیکھا جائے تو زاویہ نزول $60°$ بنتا ہے۔ نقطہ اور ستون کے پائے کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook



حل: مثلث ABC میں:

$$m\overline{BC} = 40 \text{ m}$$

$$m\angle A = 60°$$

فرض کریں $m\overline{AB} = x$ (نقطہ B ستون $\overline{BC}$ کا پایہ ہے)

قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں

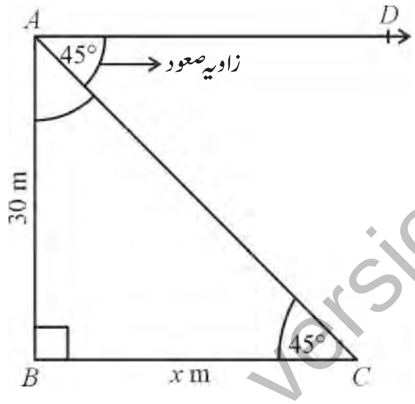
$$\tan 60° = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{40}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{40}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x = 23.09 \text{ m}$$

پس نقطہ A سے ستون کے پائے کا فاصلہ 23.09 m ہے۔



مثال 20: ایک نگرانی کے مینار (lookout tower) کے اوپر سے کسی عمارت کا زاویہ زمینی سطح پر 45° ہے۔ اگر مینار کی اونچائی 30 m ہو تو ایک آدمی مینار سے کتنا دور ہے؟

حل: مثلث ABC میں، AB مینار ہے اور نقطہ C آدمی کی پوزیشن ہے۔

ہمارے پاس ہے

$$m\overline{AB} = 30 \text{ m}$$

$$m\angle CAD = m\angle C = 45°$$

$$m\overline{BC} = x \text{ m} = ?$$

فرض کریں قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں قاعدہ ہو تو

$$\tan 45° = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{30}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = 30 \text{ m}$$

پس آدمی مینار سے 30 m دُور ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مشق 6.6

1۔ زمین کی سطح پر 40 m کے فاصلہ سے کسی جھنڈے کی پوسٹ سے اوپر والی سطح کا زاویہ نزول $60°$ ہے۔ پوسٹ کی بلندی معلوم کریں۔

2۔ ایک مساوی الساقین مثلث میں راسی زاویہ $120°$ ہے۔ اگر مثلث کے قاعدہ کی لمبائی 10 cm ہو تو اُس کے عمود کی مقدار معلوم کریں۔

3۔ ایک درخت کی اونچائی 72 m ہے۔ اس درخت سے 100 m کے فاصلہ سے اِس کے اوپر والے سرے کا زاویہ نزول معلوم کریں۔

4۔ ایک سیڑھی زمین کے ساتھ $60°$ کا زاویہ بناتی ہے اور دیوار کے ساتھ 10 m کی بلندی تک پہنچتی ہے۔ اِس سیڑھی کی لمبائی معلوم کریں۔

5۔ سمندر کی سطح سے ایک روشنی کے مینار کی اونچائی 150 m ہے اگر اِس مینار کی اوپر والی سطح سے کسی بحری جہاز کا زاویہ صعود $60°$ ہو تو اِس مینار اور بحری جہاز کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔

6۔ زمین کی سطح کے ایک نقطہ سے کسی ستون کی اوپر والی سطح کا زاویہ نزول $15°$ ہے۔ اگر ستون کی طرف 100 m چلنے کے بعد زاویہ نزول کی مقدار $30°$ ہو جاتی ہے تو ستون کی اونچائی معلوم کریں۔

7۔ اگر 300 m اونچے مینار کا سایہ 450 m ہو تو سورج کے زاویہ نزول کی مقدار معلوم کریں۔

8۔ کسی پہاڑی کی چوٹی کا زاویہ نزول $25°$ ہے۔ پہاڑی کی طرف 100 m چلنے کے بعد زاویہ نزول کی مقدار $45°$ ہو جاتی ہے پہاڑی کی اونچائی معلوم کریں۔

9۔ 300 m اونچی پہاڑی کی چوٹی سے نزدیکی دریا کے ساحل پر کسی نقطہ کا زاویہ صعود $70°$ کا ہے اور دریا کے دوسرے کنارے کا زاویہ صعود $50°$ کا ہے۔ دریا کی چوڑائی معلوم کریں اور پہاڑی کی بنیاد سے دریا کا فاصلہ معلوم کریں۔

10۔ ایک پتنگ کے ساتھ 120 m لمبا دھاگہ بندھا ہوا ہے۔ اور اس کا زاویہ نزول $50°$ کا ہے۔ یہ پکڑنے والے کے ہاتھ سے کتنی دور ہے۔ (فرض کریں کہ دھاگہ تنا ہوا ہے)

جائزہ مشق 6

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) ریڈین میں $\tan^{-1} 2$ کی قدر ہے:

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $1.11\,\pi$ (d) 1.11

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(ii) قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر 13 اکائیاں اور ایک زاویہ $\theta = 30°$ ہے۔ مخالف ضلع کی لمبائی ہے:

(a) 6.5 اکائیاں (b) 7.5 اکائیاں (c) 6 اکائیاں (d) 5 اکائیاں

(iii) عمارت سے 50 m دور کھڑا شخص عمارت کی چوٹی کو 45° کی بلندی کے زاویے پر دیکھتا ہے۔ عمارت کی اونچائی ہے:

(a) 50 m (b) 25 m (c) 35 m (d) 70 m

(iv) $\sec^2\theta - \tan^2\theta =$ ________

(a) $\sin^2\theta$ (b) 1 (c) $\cos^2\theta$ (d) $\cot^2\theta$

(v) اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ اور θ ایک حادہ زاویہ ہو تو $\cos^2\theta =$ ________۔

(a) $\frac{7}{25}$ (b) $\frac{24}{25}$ (c) $\frac{16}{25}$ (d) $\frac{4}{25}$

(vi) $\frac{5\pi}{24}$ rad $=$ ________۔

(a) 30° (b) 37.5° (c) 45° (d) 52.5°

(vii) $292.5° =$ ________ rad

(a) $\frac{17\pi}{6}$ (b) $\frac{17\pi}{4}$ (c) 1.6π (d) 1.625π

(viii) درج ذیل میں سے کون سی ایک درست تکونیاتی اکائی ہے؟

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$ (b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

(c) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sec\theta$ (d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$

(ix) $\sin 60° =$ ________

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\sqrt{(3)^2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(x) $\cos^2 100\pi + \sin^2 100\pi =$ ________

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

2۔ دیے گئے زاویوں کو:

(a) ریڈین میں تبدیل کریں اور جواب کو π کی شکل میں لکھیں۔

(i) 255° (ii) 75° 45′ (iii) 142.5°

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(b) ریڈین سے ڈگری میں تبدیل کریں اور جواب ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں لکھیں۔

(i) $\frac{17\pi}{24}$　　(ii) $\frac{7\pi}{12}$　　(iii) $\frac{11\pi}{16}$

3۔ درج ذیل تکونیاتی اکائیوں کو ثابت کریں:

(i) $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

(ii) $\sin\theta\,(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta) = \frac{1}{\sec^2\theta}$

(iii) $\frac{\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta} = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

(iv) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\,\cos\theta}$

(v) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{2}{1-2\sin^2\theta}$

(vi) $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)^2$

4۔ اگر $\tan\theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ہو تو باقی تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں جب θ پہلے ربع میں ہو۔

5۔ زمین پر ایک مقام سے 30 m اونچی عمارت کی چوٹی کا زاویہ 28° ہے۔ عمارت کی بنیاد سے مقام کتنا دور ہے؟

6۔ دیوار کے ساتھ لگی ہوئی سیڑھی زمین کے ساتھ 65° کا زاویہ بناتی ہے۔ اگر سیڑھی 10 m لمبی ہو تو یہ دیوار پر کتنی اونچائی تک پہنچتی ہے؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ 7

محدداتی جیومیٹری (Coordinate Geometry)

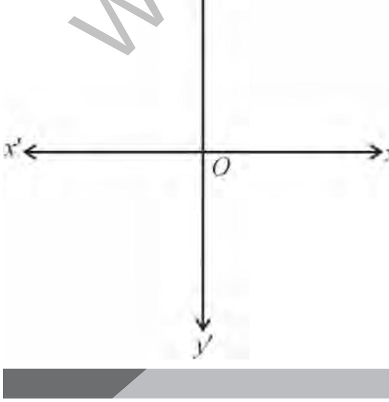
اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- محدداتی مستوی میں دو نقاط کی پوزیشن کا پتہ لگا کر فاصلے کا کلیہ اخذ کر سکیں۔
- قطعہ خط کا وسطی نقطہ معلوم کر سکیں۔
- جب دو نقاط کے محددات دیے گئے ہوں تو خط مستقیم کی ڈھلوان معلوم کر سکیں۔
- $y = mx + c$ کی شکل میں خط مستقیم کی مساوات معلوم کر سکیں۔ عمودی اور متوازی خطوط کی ڈھلوان معلوم کر سکیں۔
- حقیقی زندگی کے مسائل جیسے جسمانی پیمائش یا مقامات کے درمیان فاصلے کو معلوم کرنے کے لیے فاصلہ اور وسطی نقطہ کے کلیوں کا اطلاق کر سکیں۔
- محدداتی جیومیٹری کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل (جیسا کہ ہوابازی اور نیویگیشن، لینڈ سکیپنگ، نقشہ پڑھنا، طول بلد اور عرض بلد) میں اطلاق کر سکیں۔
- خط مستقیم کی مساوات اخذ کر سکیں:
  - نقطہ ڈھلوان شکل
  - ڈھلوان قاطع شکل
  - دو نقاطی شکل
  - قاطع شکل
  - سمیٹرک شکل
  - عام شکل
- اظہار کر سکیں کہ دو متغیرات میں یک درجی مساوات ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے اور خط مستقیم کی مساوات کی عمومی شکل کو دیگر معیاری صورتوں میں تبدیل کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

جیومیٹری ریاضی کی قدیم ترین شاخوں میں سے ایک ہے۔ یونانیوں نے چار صدی قبل مسیح میں منظم طریقے سے اس کا مطالعہ کیا۔ اسکولوں میں پڑھائی جانے والی زیادہ تر جیومیٹری یوکلڈ کی وجہ سے ہے جس نے اس موضوع پر 300 قبل مسیح میں تیرہ کُتب کی توضیح کی۔ ایک فرانسیسی فلسفی اور ریاضی دان رینے ڈیکارٹس (1596 تا 1650 عیسوی) نے جیومیٹری میں الجبری طریقے متعارف کروائے جس نے تجزیاتی جیومیٹری (یا محدداتی جیومیٹری) کو جنم دیا۔ ہمارا مقصد اس کتاب میں مضمون کی بنیادی باتیں پیش کرنا ہے۔

7.1 محدداتی مستوی (Coordinate Plane)



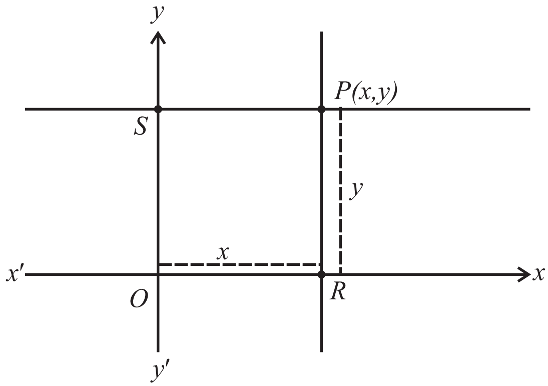
مستوی میں دو باہم عمودی خطوط مستقیم، ایک افقی اور دوسرا عمودی، xx' اور yy' کھینچیں۔ فرض کریں کہ دونوں خطوط مستقیم جس نقطہ پر ملتے ہیں اس کو مبدا کہتے ہیں اور O سے ظاہر کرتے ہیں۔ دونوں خطوط مستقیم کو محدداتی محور کہا جاتا ہے۔ افقی خط مستقیم $x'Ox$ کو x- محور اور عمودی خط مستقیم $y'Oy$ کو y- محور کہا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

اہم معلومات:

کارتیسی محدداتی نظام یا مستطیلی محدداتی نظام کو فرانسیسی ریاضی دان رینے ڈیکارٹس نے متعارف کرایا تھا۔ جب اس نے اپنے بستر پر لیٹے ہوئے چھت پر باہم عمودی شہتیروں کے ساتھ رینگنے والی مکھی کے راستے کو بیان کرنے کی کوشش کی۔ کارتیسی محدداتی نظام نے الجبرا اور جیومیٹری کے درمیان ایک ربط پیدا کیا۔ جیومیٹری کی اشکال کو اب ان نقاط کے محددات کا استعمال کرتے ہوئے الجبری طور پر بیان کیا جاسکتا ہے جو اشکال بناتے ہیں۔

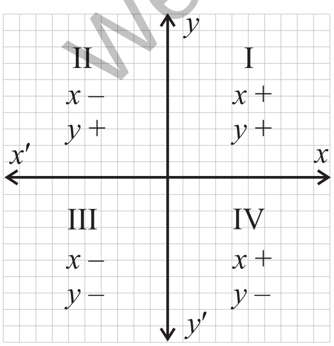


ایسے نقاط جو Ox پر واقع ہوں وہ مثبت اور جو نقاط Ox' پر واقع ہوں وہ منفی ہوتے ہیں۔

ایسے نقاط جو Oy پر واقع ہوں وہ مثبت اور جو نقاط Oy' پر واقع ہوں وہ منفی ہوتے ہیں۔

فرض کریں کہ مستوی میں کوئی بھی نقطہ P ہے۔ پھر حقیقی اعداد کے مترتب جوڑے کا استعمال کر کے P کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔ P کے ذریعے محدداتی محوروں کے متوازی خطوط کھینچیں جو x- محور کو R اور y- محور کو S پر ملتے ہیں۔ فرض کریں کہ $\overline{OR} = x$ اور $\overline{OS} = y$ مترتب جوڑا (x, y) ہمیں نقطہ P کو معلوم کرنے کے لیے کافی معلومات فراہم کرتا ہے اور اس کے محددات (x, y) ہیں۔ مترتب جوڑے (x, y) کے پہلے جزو کو x- محدد یا ایبسیسا (Abscissa) اور دوسرے جزو کو y- محدد یا آرڈینیٹ (Ordinate) کہا جاتا ہے۔ اس مہارت کا اُلٹ بھی مستوی میں ایک نقطہ کو حقیقی اعداد کے کسی بھی مترتب جوڑے (x, y) کے ساتھ منسلک کرنے کا طریقہ فراہم کرتا ہے۔ ون ٹو ون انداز میں جوڑا بنانے کے اس طریقے کو حقیقی اعداد کے مترتب جوڑے کے ساتھ ایک مستوی میں نقاط کو دورُخی مستطیلی (یا کارتیسی) محدداتی نظام کہا جاتا ہے۔

محدداتی محور مستوی کو جن چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اسے ربع کہتے ہیں۔ ان کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے:



پہلا ربع (I) : تمام نقاط (x, y) جن میں x اور y دونوں مثبت ہوں۔

دوسرا ربع (II) : تمام نقاط (x, y) جن میں x منفی اور y مثبت ہو۔

تیسرا ربع (III) : تمام نقاط (x, y) جن میں x اور y دونوں منفی ہوں۔

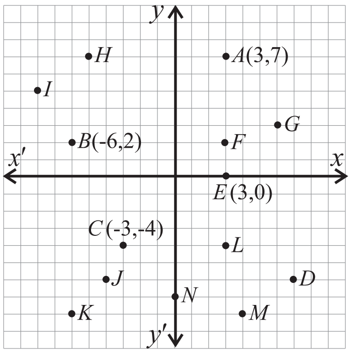
چوتھا ربع (IV) : تمام نقاط (x, y) جن میں x مثبت اور y منفی ہو۔

مستوی میں نقطہ P جس مترتب جوڑے (x, y) سے مطابقت رکھتا ہے اسے گراف کہتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

اس طرح دیے گئے حقیقی اعداد کے مترتب جوڑوں کا ایک سیٹ مستوی کے تمام نقاط کے سیٹ کا گراف ہوتا ہے جو سیٹ کے مترتب جوڑوں کے مساوی ہوتا ہے۔



آپ کو جاننا چاہیے!

x- محور پر نقاط $(a, 0)$ کی شکل کے ہوتے ہیں اور y- محور پر نقاط $(0, b)$ کی شکل کے ہوتے ہیں۔

چیلنج!

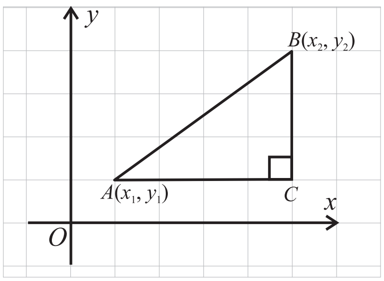
(i) ان نقاط کے محددات لکھیے جن کا متصل شکل میں ذکر نہیں کیا گیا ہے۔

(ii) ظاہر کریں $(-4, 7)$, $(2, 2)$, $(0, -1)$ اور $(-3, -3)$

نوٹ: $|\overline{AB}|$ کا مطلب $m\overline{AB}$ ہے۔

7.1.1 فاصلے کا کلیہ (The Distance Formula)

فرض کریں کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ مستوی میں دو نقاط ہیں۔ فاصلہ $d = |\overline{AB}|$ معلوم کرنے کے لیے ہم نقطہ A سے نقطہ C تک ایک افقی خط کھینچتے ہیں جو B کے نیچے واقع ہے اور ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC بناتا ہے۔



$|\overline{AC}| = |x_2 - x_1|$ اور $|\overline{BC}| = |y_2 - y_1|$

مسئلہ فیثا غورث کا استعمال کرتے ہوئے

$$d^2 = |\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

یا

$$\boxed{d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad \ldots(i)$$

فاصلے کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے۔ یہ A سے B تک کا براہ راست فاصلہ نہیں ہے۔

اگر A اور B محدداتی محوروں میں سے کسی ایک کے متوازی خط پر واقع ہوں تو کلیہ (i) کے ذریعے $\overrightarrow{AB}$ کا براہ راست فاصلہ $\overrightarrow{AB}$ کی مطلق قدر ہوتا ہے۔ کلیہ (i) ظاہر کرتا ہے کہ دو نقاط میں سے کسی کو بھی پہلے نقطہ کے طور پر لیا جاسکتا ہے۔

مثال 1: دیے گئے نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کریں:

(i) $A(5, 6)$ ، $B(5, -2)$ (ii) $C(-4, -2)$ ، $D(0, 9)$

حل: فاصلے کے کلیہ کی مدد سے

(i)

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(5-5)^2 + (-2-6)^2}$$

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(0)^2 + (-8)^2}$$

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{0 + 64} = 8$$

(ii)

$$d = |\overline{CD}| = \sqrt{(0-(-4))^2 + (9-(-2))^2}$$

$$d = |\overline{CD}| = \sqrt{(0+4)^2 + (9+2)^2}$$

$$d = |\overline{CD}| = \sqrt{4^2 + 11^2}$$

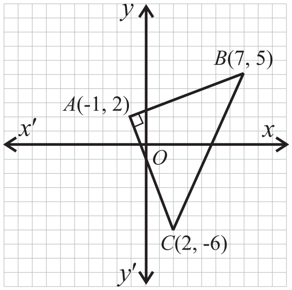
$$d = |\overline{CD}| = \sqrt{16 + 121} = \sqrt{137}$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال2: ثابت کریں کہ نقاط $A(-1, 2)$، $B(7, 5)$ اور $C(2, -6)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

حل: فرض کریں کہ a، b اور c بالترتیب اضلاع $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ اور $\overline{AB}$ کی لمبائیاں ہیں۔

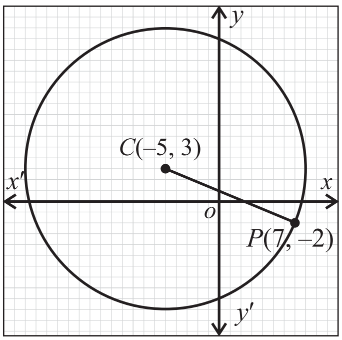


فاصلہ کے کلیہ کی مدد سے

$$c = |\overline{AB}| = \sqrt{(7-(-1))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{73}$$
$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{(2-7)^2 + (-6-5)^2} = \sqrt{146}$$
$$b = |\overline{CA}| = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{73}$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

اس لیے ABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس کا قائمہ زاویہ A پر ہے۔

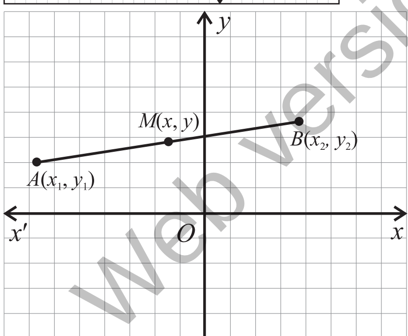
مثال3: نقطہ $C(-5, 3)$ دائرہ کا مرکز اور $P(7, -2)$ دائرہ پر واقع ہے۔ دائرہ کا رداس معلوم کریں۔



حل: دائرہ کا رداس نقطہ C سے P تک کا فاصلہ ہے۔ فاصلہ کے کلیہ سے

$$\text{رداس} = |\overline{CP}| = \sqrt{(7-(-5))^2 + (-2-3)^2}$$
$$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169}$$
$$= 13$$

7.1.2 وسطی نقطہ معلوم کرنے کا کلیہ (Mid Point Formula)



وسطی نقطہ کا کلیہ جیومیٹری میں مستوی میں دو دیے گئے نقاط کے درمیان وسطی نقطہ معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ یہ کلیہ خاص طور پر اس وقت مفید ہوتا ہے جب آپ کو قطعہ خط کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنے کی ضرورت ہو۔

وسطی نقطہ کا کلیہ اخذ کرنا

فرض کریں کہ دو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ دو رُخی مستوی پر واقع ہیں۔ ان دو نقاط سے بننے والے قطعہ خط میں ایک وسطی نقطہ $M(x, y)$ ہے، جہاں x اور y وسطی نقطہ کے محددات ہیں۔

$M(x, y)$ کے کلیہ کو اخذ کرنے کے لیے ہمیں نقاط A اور B کے x-محدد اور y-محدد کی اوسط الگ الگ معلوم کرنی ہو گی۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

1۔ وسطی نقطہ کا x - محدد

وسطی نقطہ کا x- محدد نقاط A اور B کے x- محددات کا اوسط ہوتا ہے۔

یعنی کہ $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

2۔ وسطی نقطہ کا y - محدد

وسطی نقطہ کا y- محدد نقاط A اور B کے y- محددات کا اوسط ہوتا ہے۔

یعنی کہ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

پس وسطی نقطہ $M(x, y)$ کے محددات یہ ہیں:

$$M(x,\ y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال 4: $A(2, 3)$ اور $B(8, 7)$ کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ معلوم کریں۔

حل: وسطی نقطہ کلیہ کی مدد سے

$$M(x,\ y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

وسطی نقطہ کلیہ میں درج کرنے سے $x_1 = 2$ ، $x_2 = 8$ ، $y_1 = 3$ اور $y_2 = 7$

$$M = \left(\frac{2 + 8}{2},\ \frac{3 + 7}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{10}{2},\ \frac{10}{2}\right) = (5,\ 5)$$

مشق 7.1

1۔ نقاط $P(x, y)$ کے مستوی میں مقام کی وضاحت کریں، جس کے لیے:

(i) $x > 0$　(ii) $x > 0$ اور $y > 0$　(iii) $x = 0$　(iv) $y = 0$

(v) $x > 0$ اور $y \le 0$　(vi) $x = 0$ ، $y = 0$　(vii) $x = y$

(viii) $x \ge 3$　(ix) $y > 0$　(x) x اور y کی مخالف علامتیں ہیں

2۔ درج ذیل نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کریں:

(i) $A(6, 7)$ ، $B(0, -2)$　(ii) $C(-5, -2)$ ، $D(3, 2)$

(iii) $L(0, 3)$ ، $M(-2, -4)$　(iv) $P(-8, -7)$ ، $Q(0, 0)$

3۔ درج ذیل میں معلوم کریں:

(i) دیے گئے دو نقاط کے درمیان فاصلہ

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ii) دو نقاط کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ

(a) $A(3, 1)$ ، $B(-2, -4)$ (b) $A(-8, 3)$ ، $B(2, -1)$

(c) $A\left(-\sqrt{5}, -\frac{1}{3}\right)$ ، $B\left(-3\sqrt{5}, 5\right)$

4۔ درج ذیل نقاط میں سے کون سے مبدا سے 15 اکائیوں کے فاصلہ پر ہیں؟

(i) $(\sqrt{176}, 7)$ (ii) $(10, -10)$ (iii) $(1, 15)$

5۔ ثابت کیجیے کہ:

(i) نقاط $A(0, 2)$ ، $B(\sqrt{3}, 1)$ اور $C(0, -2)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

(ii) نقاط $A(3, 1)$ ، $B(-2, -3)$ اور $C(2, 2)$ متساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

(iii) نقاط $A(5, 2)$ ، $B(-2, 3)$ ، $C(-3, -4)$ اور $D(4, -5)$ متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

6۔ h کی قیمت معلوم کریں جب کہ نقاط $A(\sqrt{3}, -1)$ ، $B(0, 2)$ اور $C(h, -2)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں جس میں قائمۃ الزاویہ راس A پر ہے۔

7۔ نقاط $A(-1, h)$ ، $B(3, 2)$ اور $C(7, 3)$ ہم خط ہیں۔ h معلوم کریں۔

8۔ نقاط $A(-5, -2)$ اور $B(5, -4)$ دائرہ کے قطر کے سرے ہیں۔ دائرہ کا مرکز اور رداس معلوم کریں۔

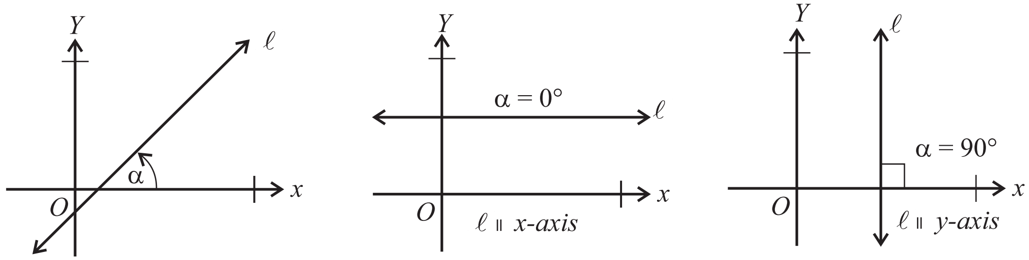
9۔ نقاط $A(h, 1)$ ، $B(2, 7)$ اور $C(-6, -7)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں جس میں قائمۃ الزاویہ راس A پر ہے۔ h معلوم کریں۔

10۔ نقاط $A(9, 3)$ ، $B(-7, 7)$ ، $C(-3, -7)$ اور $D(5, -5)$ چوکور کے راس ہیں۔ اس کے اضلاع کے وسطی نقاط معلوم کریں۔ ثابت کیجیے کہ وسطی نقاط کو ملانے سے جو شکل بنتی ہے وہ متوازی الاضلاع ہے۔

Web version of PCTB textbook

7.2 خط مستقیم کی مساواتیں (Equations of Straight Line)

خط کا جھکاؤ: زاویہ $\alpha (0° < \alpha < 180°)$ مثبت x- محور سے غیر افقی خط مستقیم ℓ تک گھڑی کی مخالف سمت میں ماپا جاتا ہے۔ ℓ کا جھکاؤ کہلاتا ہے۔

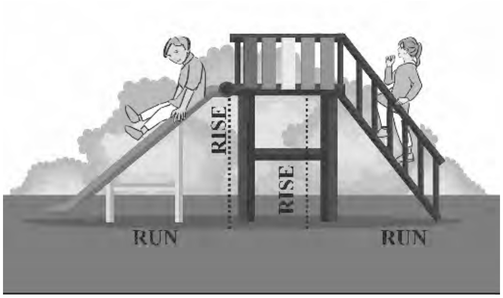


NOT FOR SALE-PESRP

مشاہدہ کریں کہ زاویہ α خط ℓ کی مختلف حالتوں میں بالترتیب α ، °0 اور °90 ہے۔

نوٹ:
(i) اگر ℓ، x- محور کے متوازی ہو تو $\alpha = 0°$
(ii) اگر ℓ، y- محور کے متوازی ہو تو $\alpha = 90°$

خط کی ڈھلوان یا میلان (Slope or Gradient of a Line)



جب ہم ڈھلوان مستوی پر چلتے ہیں تو ہم ایک ہی وقت میں افقی فاصلہ (run) کے ساتھ ساتھ عمودی فاصلہ (rise) بھی طے کرتے ہیں۔ زیادہ ڈھلوان والی مستوی پر چڑھنا مشکل ہے۔ کھڑے پن کی پیمائش (عمودی فاصلہ اور افقی فاصلہ میں نسبت) کو سطح مائل راستے کی ڈھلوان یا میلان کہا جاتا ہے اور اسے m سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$m = \frac{\text{عمودی فاصلہ}}{\text{افقی فاصلہ}} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

تجزیاتی جیومیٹری میں ایک غیر عمودی خط مستقیم کی ڈھلوان یا میلان m جس کے جھکاؤ کی وضاحت کی گئی ہے: $m = \tan\alpha$

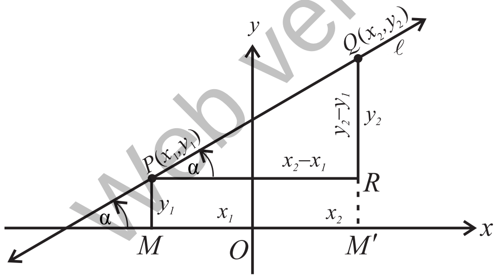
اگر ℓ افقی خط ہو تو اس کی ڈھلوان صفر ہوتی ہے اور اگر ℓ عمودی ہو تو اس کی ڈھلوان غیر واضح ہوتی ہے۔

اگر $0° < \alpha < 90°$ ہو تو m مثبت ہوتا ہے اور اگر $90° < \alpha < 180°$ ہو تو m منفی ہوتا ہے۔

7.2.1 دو نقاط کو ملانے والے خط مستقیم کی ڈھلوان یا میلان
(Slope or Gradient of a Straight Line Joining Two Points)

مسئلہ 1: اگر ایک غیر عمودی خط ℓ زاویہ α کے ساتھ دو نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ سے گزرتا ہو تو ℓ کی ڈھلوان یا میلان m درج ذیل ہوتی ہے:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha$$



ثبوت: فرض کریں کہ خط ℓ کی ڈھلوان m ہے۔

x- محور پر عمود $\overline{PM}$ اور $\overline{QM'}$ کھینچیں اور $\overline{QM'}$ پر عمود $\overline{PR}$ کھینچیں۔

اس طرح $m\overline{PR} = x_2 - x_1$, $m\overline{QR} = y_2 - y_1$ اور $m\angle RPQ = \alpha$

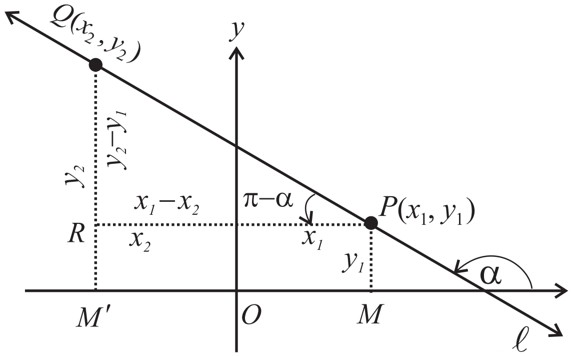
اور ℓ کی ڈھلوان یا میلان کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے:

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ڈھلوان کیوں ضروری ہے؟
ڈھلوان کا تصوّر، انجینئرنگ، آرکیٹیکچر حتیٰ کہ کھیلوں اور سائیکلنگ میں بھی استعمال ہو رہا ہے۔ جہاں پہاڑی کی ڈھلوان کا علم بہت ضروری ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



صورت **(i)**: جب $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

قائمۃ الزاویہ مثلث PRQ میں

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صورت **(ii)**: جب $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

قائمۃ الزاویہ مثلث PRQ میں

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

یا $$-\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

یا $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{یا} \quad \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

اگر $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ خط پر دو نقاط ہوں تو PQ کی ڈھلوان ہوتی ہے:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{یا} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

نوٹ:

(i) $m \neq \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$ یا $m \neq \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

(ii) ℓ افقی خط ہے صرف اور صرف اسی صورت میں جب کہ $m = 0$ $(\because \alpha = 0^\circ)$

(iii) ℓ عمودی خط ہے صرف اور صرف اسی صورت میں جب کہ m کی وضاحت نہ ہو $(\because \alpha = 90^\circ)$

(iv) اگر $\overline{BC}$ کی ڈھلوان $=$ $\overline{AB}$ کی ڈھلوان ہو تو نقاط A, B اور C ہم خط ہیں۔

مسئلہ نمبر 2: اگر خطوط ℓ_1 اور ℓ_2 کی ڈھلوانیں بالترتیب m_1 اور m_2 ہوں تو:

(i) متوازی صرف اور صرف اسی صورت میں جب کہ $m_1 = m_2$

(ii) عمودی صرف اور صرف اسی صورت میں جب کہ $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

یا $m_1 m_2 = -1$

یاد رکھیے!

(i) علامت $||$ کا مطلب متوازی ہے۔

(ii) علامت $\nparallel$ کا مطلب متوازی نہیں ہے۔

(iii) علامت $\perp$ کا مطلب عمود ہے۔

مثال 5: ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-3, 6)$ ، $B(3, 2)$ اور $C(6, 0)$ ہم خط ہیں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ نقاط A ، B اور C ہم خط ہوتے ہیں اگر خط $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کی ڈھلوانیں برابر ہوں۔

یہاں $\overline{AB}$ کی ڈھلوان $= \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{3+3} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$ اور $\overline{BC}$ کی ڈھلوان $= \frac{0-2}{6-3} = \frac{-2}{3}$

$\because$ $\overline{BC}$ کی ڈھلوان $=$ $\overline{AB}$ کی ڈھلوان

اس لیے نقاط A، B اور C ہم خط ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 6: ثابت کیجیے کہ نقاط $A(1, 1)$ ، $B(4, 5)$ اور $C(12, -1)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

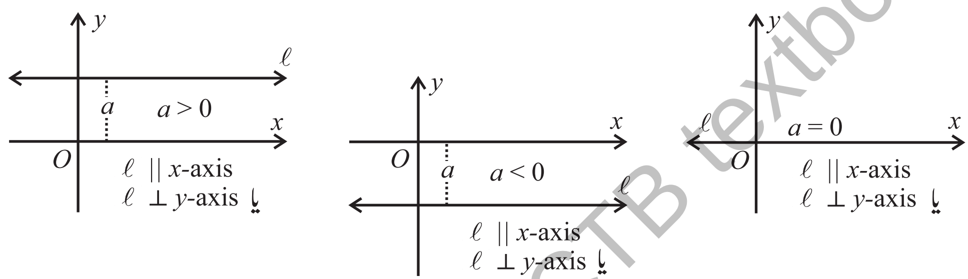
حل: $\overline{AB}$ کی ڈھلوان $= m_1 = \frac{5-1}{4-1} = \frac{4}{3}$ اور $\overline{BC}$ کی ڈھلوان $= m_2 = \frac{-1-5}{12-4} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$

چوں کہ $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$ ، اس لیے $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

پس ΔABC قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

7.2.2 x- محور کے متوازی خط مستقیم کی مساوات (یا y- محور کے عمودی خط مستقیم کی مساوات)

(Equation of a Straight Line Parallel to the x-axis (perpendicular to the y-axis))

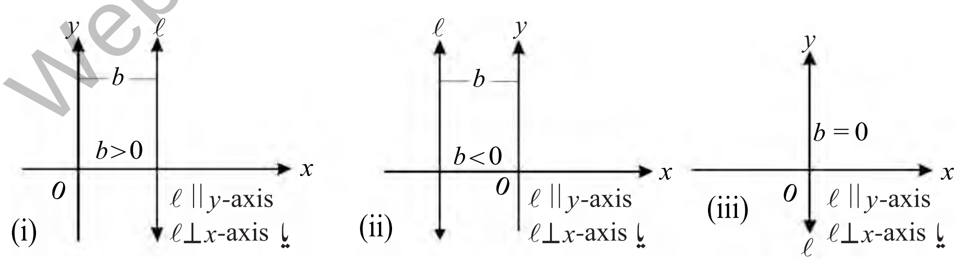


خط ℓ پر تمام نقاط x- محور کے متوازی ہیں اور x- محور سے مستقل فاصلے (a) پر رہتے ہیں۔ لہٰذا خط پر ہر نقطہ کا x- محور سے فاصلہ a کے برابر ہے، جو کہ اس کا y- محدد (آرڈینیٹ) ہے۔ لہٰذا اس خط پر تمام نقاط مساوات $y = a$ کو درست ثابت کرتے ہیں۔

> **نوٹ:**
> (i) اگر $a > 0$ ہو تو ℓ خط x- محور کے اوپر ہوتا ہے۔
> (ii) اگر $a < 0$ ہو تو ℓ خط x- محور کے نیچے ہوتا ہے۔
> (iii) اگر $a = 0$ ہو تو ℓ خط x- محور بن جاتا ہے۔ پس x- محور کی مساوات $y = 0$ ہے۔

7.2.3 y- محور کے متوازی خط مستقیم کی مساوات (یا x- محور کے عمودی خط مستقیم کی مساوات)

(Equation of a straight Line Parallel to the y-axis (or perpendicular to the x-axis)

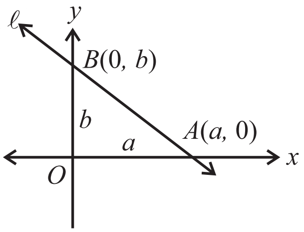


خط ℓ پر تمام نقاط y- محور کے متوازی ہیں اور y- محور سے مستقل فاصلے (b) پر رہتے ہیں۔ لہٰذا خط پر ہر نقطہ کا y- محور سے فاصلہ b کے برابر ہے جو کہ اس کا x- محدد ہے۔ لہٰذا اس خط پر تمام نقاط مساوات $x = b$ کو درست ثابت کرتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

7.2.4 خط مستقیم کی مساوات کی معیاری اشکال کو اخذ کرنا
(Derivation of Standard Forms of Equation of Straight Line)



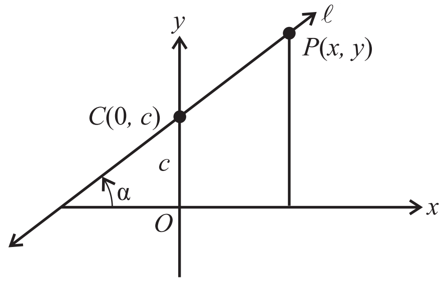
خط کے قاطع (Intercepts of a Line)

- اگر خط x- محور کو $(a, 0)$ پر قطع کرے تو a خط کا x- قاطع کہلاتا ہے۔
- اگر خط y- محور کو $(0, b)$ پر قطع کرے تو b خط کا y- قاطع کہلاتا ہے۔

1۔ خط مستقیم کی مساوات کی ڈھلوان قاطع شکل
(Slope-Intercept form of Equation of a Straight Line)

مسئلہ 3: غیر عمودی خط مستقیم کی مساوات جس کی ڈھلوان m اور y- قاطع c ہو درج ذیل ہے۔

$$y = mx + c$$



ثبوت: فرض کریں کہ $P(x, y)$ خط مستقیم ℓ کا کوئی بھی نقطہ ہے جس کی ڈھلوان m اور y- قاطع c ہے۔ جیسا کہ $C(0, c)$ اور $P(x, y)$ دونوں خط پر واقع ہیں، لہٰذا خط کی ڈھلوان یہ ہے:

$m = \dfrac{y-c}{x-0}$ یا $y - c = mx$ یا $y = mx + c$ جو کہ ℓ کی مساوات ہے۔

$y = mx$ خط کی مساوات ہے جس میں $c = 0$ ہے۔ اس صورت میں خط مبدا سے گزرتا ہے۔

مثال 7: خط مستقیم کی مساوات معلوم کریں اگر

(a) اس کی ڈھلوان 2 اور y- قاطع 5 ہو۔

(b) یہ ڈھلوان 6− والے خط پر عمود ہو اور y- قاطع $\frac{4}{3}$ ہو۔

حل: (a) خط کی ڈھلوان اور y- قاطع بالترتیب $m = 2$ اور $c = 5$ ہیں۔

پس $y = 2x + 5$ مطلوبہ مساوات ہے۔

(b) $m_1 = -6$ دیے گئے خط کی ڈھلوان ہے۔

اس لیے مطلوبہ خط کی ڈھلوان $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = \dfrac{1}{6}$ ہے۔

خط کی ڈھلوان اور y- قاطع بالترتیب $m_2 = \dfrac{1}{6}$ اور $c = \dfrac{4}{3}$ ہیں۔

پس $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{4}{3}$ یا $6y = x + 8$ مطلوبہ مساوات ہے۔

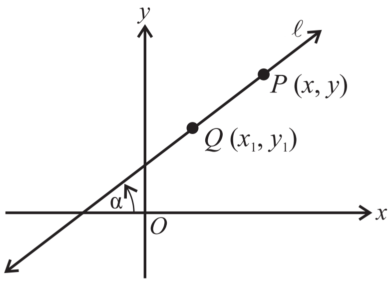
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

2۔ خط مستقیم کی مساوات کی نقطہ ڈھلوان شکل (Point-slope Form of Equation of a Straight Line)

مسئلہ 4: غیر عمودی خط مستقیم ℓ کی مساوات جس کی ڈھلوان m اور نقطہ $Q\ (x_1\ ,\ y_1)$ سے گزرتا ہو درج ذیل ہے۔

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$



ثبوت: فرض کریں کہ $P\ (x, y)$ خط مستقیم ℓ کا کوئی بھی نقطہ ہے جس کی ڈھلوان m اور نقطہ $Q\ (x_1\ ,\ y_1)$ سے گزرتا ہے۔ جیسا کہ $Q(x_1,\ y_1)$ اور $P(x, y)$ دونوں خط پر واقع ہیں لہٰذا خط کی ڈھلوان یہ ہے۔

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \text{ or } y - y_1 = m(x - x_1)$$

جو کہ خط مستقیم کی مساوات ہے جو $Q(x_1\ ,\ y_1)$ میں سے گزرتا ہے اور ڈھلوان m ہے۔

3۔ خط مستقیم کی مساوات کی سیمیٹرک شکل (Symmetric Form of Equation of a Straight Line)

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \tan\alpha$ جہاں α خط کا جھکاؤ ہے۔

$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ یا $\dfrac{x - x_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y - y_1}{\sin\alpha} = r$ (فرض کریں)

یہ خط مستقیم کی مساوات کی سیمیٹرک شکل کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال 8: نقطہ $(5, 1)$ سے گزرنے والے خط مستقیم کی ایک مساوات لکھیں جو نقاط $(0, -1)$ ، $(7, -15)$ سے گزرنے والے خط کے متوازی ہو۔

حل: فرض کریں کہ m مطلوبہ خط مستقیم کی ڈھلوان ہے اس طرح

$$m = \frac{-15 - (-1)}{7 - 0} = -2$$

(کیوں کہ متوازی خطوط کی ڈھلوانیں برابر ہوتی ہیں۔)

جیسا کہ نقطہ $(5,\ 1)$ مطلوبہ خط پر واقع ہے جس کی ڈھلوان -2 ہے، اس طرح نقطہ ڈھلوان شکل سے خط مستقیم کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$y - 1 = -2(x - 5)$$

یا $$y = -2x + 11$$

یا $$2x + y - 11 = 0$$

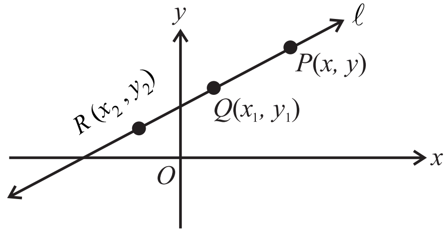
مطلوبہ خط مستقیم کی مساوات ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

4۔ خطِ مستقیم کی مساوات کی دو نقاطی شکل (Two-point Form of Equation of a Straight Line)

مسئلہ نمبر 5: غیر عمودی خطِ مستقیم ℓ کی مساوات جو نقاط $Q(x_1 , y_1)$ اور $R(x_2 , y_2)$ میں سے گزرتی ہو درج ذیل ہے:



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

یا

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

ثبوت: فرض کریں کہ $P (x, y)$ خطِ مستقیم کا کوئی بھی نقطہ ہے جو کہ نقاط $Q (x_1 , y_1)$ اور $R (x_2 , y_2)$ میں سے گزرتا ہے۔

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ (P، Q اور R ہم خط نقاط ہیں)

ہم لیتے ہیں

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ جو کہ مطلوبہ خط PQ کی مساوات ہے۔

یا $(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$

قالب میں ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ اسی طرح $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - 1}(x - x_2)$ بھی اخذ کی جاسکتی ہے۔

مثال 9: ایسے خط کی مساوات معلوم کریں جو $(-2, 1)$ اور $(6, -4)$ میں سے گزرتا ہو۔

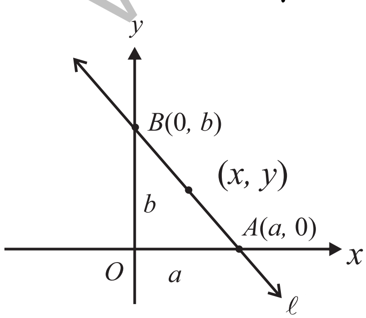
حل: خطِ مستقیم کی مساوات کی دو نقاطی شکل کا استعمال کرتے ہوئے مطلوبہ مساوات یہ ہے:

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)] \quad \text{یا} \quad y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2) \quad \text{یا} \quad 5x + 8y + 2 = 0$$

5۔ خطِ مستقیم کی مساوات کی قاطع شکل (Intercept Form of Equation of a Straight Line)

مسئلہ 6: خطِ مستقیم کی مساوات جس کے غیر صفر x اور y- قاطع بالترتیب a اور b ہوں درج ذیل ہے:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



ثبوت: فرض کریں کہ $P (x, y)$ خطِ مستقیم کا کوئی بھی نقطہ ہے جس کے غیر صفر x اور y- قاطع بالترتیب a اور b ہیں۔ ظاہر ہے نقاط $A(a, 0)$ اور $B(0, b)$ مطلوبہ خط پر واقع ہیں۔ تو خط کی مساوات کی دو نقاطی شکل ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$$ (P، A اور B ہم خط نقاط ہیں)

$$-ay = b(x-a) \quad \text{یا} \quad bx + ay = ab$$

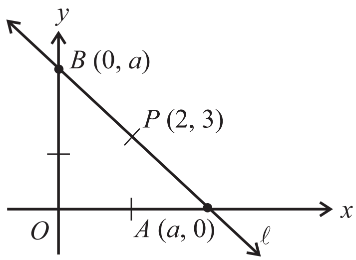
یا $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$ (ab سے تقسیم کرنے سے)

مثال 10: خط کی ایک مساوات لکھیں جو x- محور کو $(2, 0)$ اور y- محور کو $(0, -4)$ پر قطع کرتی ہے۔

حل: جیسا کہ مطلوبہ خط کے 2 اور 4- بالترتیب x اور y- قاطع ہیں اس طرح خط مستقیم کی مساوات کی دو قاطع شکل ہے۔

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1 \quad \text{یا} \quad 2x - y - 4 = 0$$

جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔



مثال 11: نقطہ $P(2, 3)$ میں سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو پہلے ربع میں محدداتی محور کے ساتھ ایک متساوی الساقین مثلث بناتی ہو۔

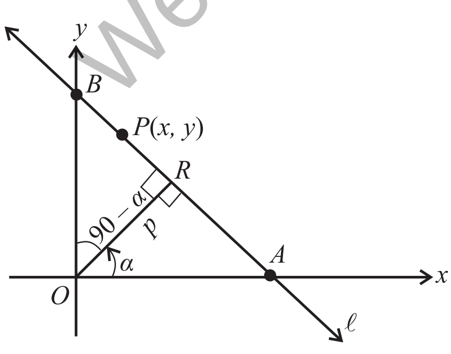
حل: فرض کریں کہ OAB ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔ خط AB نقاط $A(a, 0)$ اور $B(0, a)$ میں سے گزرتا ہے، جہاں a کوئی مثبت حقیقی عدد ہے۔

$\overline{AB}$ کی ڈھلوان $= \frac{a-0}{0-a} = -1$، لیکن $\overline{AB}$ نقطہ $P(2, 3)$ میں سے گزرتا ہے۔

ڈھلوان 1- کے ساتھ $P(2, 3)$ سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے۔

$$y - 3 = -1(x - 2) \quad \text{یا} \quad x + y - 5 = 0$$

6۔ خط مستقیم کی مساوات کی عام شکل (Normal Form of Equation of a Straight Line)



مسئلہ 7: غیر عمودی خط مستقیم ℓ کی مساوات جہاں ℓ سے مبدا تک کی عمودی لمبائی p اور α اس عمود کا جھکاؤ ہوتا ہے:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

ثبوت: فرض کریں کہ خط مستقیم ℓ x- محور اور y- محور کو بالترتیب نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔ فرض کریں کہ $P(x, y)$ خط کا کوئی بھی ایک نقطہ ہے اور $\overline{OR}$ خط ℓ پر عمود ہے۔ یعنی کہ $|\overline{OR}| = p$ قائمۃ الزاویہ مثلثوں

NOT FOR SALE-PESRP

ORA اور ORB کی مدد سے

$$\cos\alpha = \frac{p}{|\overline{OA}|} \quad \text{یا} \quad |\overline{OA}| = \frac{p}{\cos\alpha}$$

اور $$|\overline{OB}| = \frac{p}{\sin\alpha} \quad \text{یا} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{p}{|\overline{OB}|} \qquad [\because \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha]$$

جیسا کہ $|OA|$ اور $|OB|$ خط کے x اور y- قاطع ہیں۔ اس طرح خط AB کی مساوات یہ ہے:

$$\frac{x}{p/\cos\alpha} + \frac{y}{p/\sin\alpha} = 1 \qquad \text{(قاطع شکل)}$$

پس $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال 12: مبدا سے ایک خط تک کی عمودی لمبائی 5 cm ہے اور اس عمود کا جھکاؤ 120° ہے۔ خط کی ڈھلوان اور y- قاطع معلوم کریں۔

حل: یہاں $p = 5$ ، $\alpha = 120^\circ$

عام شکل میں خط مستقیم کی مساوات یہ ہے:

$$x\cos 120^\circ + y\sin 120^\circ = 5$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 5$$

$$\Rightarrow \quad x - \sqrt{3}y + 10 = 0 \qquad \ldots\text{(i)}$$

خط کی ڈھلوان معلوم کرنے کے لیے ہم (i) کو دوبارہ اس طرح سے لکھتے ہیں: $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}}$

جو کہ مساوات کی ڈھلوان قاطع شکل ہے۔ جہاں $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $c = \frac{10}{\sqrt{3}}$

7.2.5 دو متغیرات میں ایک یک درجی مساوات خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے

(A Linear Equation in two Variables Represents a Straight Line)

مسئلہ نمبر 8: دو متغیرات x اور y میں ایک یک درجی مساوات $ax + by + c = 0$ خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> مساوات (i) ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے اور اسے خط مستقیم کی عمومی مساوات کہا جاتا ہے۔

$$ax + by + c = 0 \qquad \ldots\text{(i)}$$

جہاں a ، b اور c مستقل مقداریں ہیں اور a اور b دونوں غیر صفر ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ثبوت: یہاں a اور b دونوں صفر نہیں ہو سکتے۔ تو درج ذیل صورتیں پیدا ہوتی ہیں:

صورت I: $a \neq 0\ ,\ b = 0$

اس صورت میں مساوات (i) کی شکل یہ ہے:

$$ax + c = 0 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{c}{a}$$

جو y- محور کے متوازی خط مستقیم کی مساوات ہے جو y- محور سے ایک مستقل فاصلے $-\frac{c}{a}$ پر ہے۔

صورت II: $a = 0\ ,\ b \neq 0$

اس صورت میں مساوات (i) کی شکل یہ ہے:

$$by + c = 0 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{c}{b}$$

جو x- محور کے متوازی خط مستقیم کی مساوات ہے جو x- محور سے ایک مستقل فاصلے $\frac{-c}{b}$ پر واقع ہے۔

صورت III: $a \neq 0\ ,\ b \neq 0$

اس صورت میں مساوات (i) کی شکل یہ ہے:

$$by = ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + c$$

جو کہ ڈھلوان $\frac{-a}{b}$ اور y- قاطع $\frac{-c}{b}$ کے ساتھ خط مستقیم کی ڈھلوان قاطع شکل ہے۔

اس طرح مساوات $ax + by + c = 0$ ہمیشہ خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔

7.2.6 یک درجی مساوات کو معیاری اشکال میں تبدیل کرنا
(Transform the General Linear Equation to Standard Forms)

آیئے مساوات $ax + by + c = 0$ کو معیاری اشکال میں تبدیل کرتے ہیں:

i- ڈھلوان قاطع شکل (Slope-Intercept Form)

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + c_1 \qquad \ldots(i)$$

جب کہ $m = \frac{-a}{b},\ c_1 = \frac{-c}{b}$

ii- نقطہ ڈھلوان شکل (Point - Slope Form)

(i) سے ہم نے دیکھا کہ خط $ax + by + c = 0$ کی ڈھلوان $\frac{-a}{b}$ ہے۔ خط پر ایک نقطہ $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ ہے۔

خط کی مساوات $y - 0 = -\frac{a}{b}\left(x + \frac{c}{a}\right)$ بن جاتی ہے جو نقطہ ڈھلوان شکل میں ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

iii- سمیٹرک شکل (Symmetric Form)

$$m=\tan\alpha=\frac{-a}{b},\ \sin\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

خط $ax+by+c=0$ پر ایک نقطہ $\left(\frac{-c}{a},0\right)$ ہے۔

سمیٹرک شکل میں مساوات درج ذیل بن جاتی ہے:

$$\frac{x-\left(-\frac{c}{a}\right)}{b/\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{y-0}{a/\pm\sqrt{a^2+b^2}}=r \text{ (فرض کریں)}$$

iv- دونقاطی شکل (Two -Point Form)

یہاں ہم خط $ax+by+c=0$ پر دو نقاط $\left(0,\frac{-c}{b}\right)$ اور $\left(\frac{-c}{a},0\right)$ لیتے ہیں۔ ان نقاط سے گزرنے والے خط کی مساوات یہ ہے:

$$\frac{y-0}{0+\frac{c}{b}}=\frac{x+\frac{c}{a}}{-\frac{c}{a}-0} \quad \text{جیسا کہ} \quad y-0=\frac{-a}{b}\left(x+\frac{c}{a}\right)$$

v- قاطع شکل (Intercept Form)

$$ax+by=-c \quad \text{یا} \quad \frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1 \quad \text{جیسا کہ} \quad \frac{x}{-c/a}+\frac{y}{-c/b}=1$$

جو قاطع شکل میں ہے۔

vi- عام شکل (Normal Form)

مساوات $ax+by+c=0 \quad \ldots\text{(i)}$

کو عام شکل میں اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \ldots\text{(ii)}$$

جذر کی علامت اس طرح سے لی جاتی ہے کہ (i) کے دائیں طرف جمع کی علامت ہو۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ عام شکل میں خط کی مساوات ہوتی ہے:

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad \ldots\text{(iii)}$

اگر (i) اور (iii) ایک جیسے ہوں تو

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{-c}{p}$$

$$\text{جیسا کہ} \quad \frac{p}{-c}=\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

لہٰذا $\cos\alpha = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ اور $p = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

sin α ، cos α اور p کی قیمتیں مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

اس طرح (i) کو (ii) میں تبدیل کرنے کے لیے $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ سے تقسیم کرتے ہیں۔ جذر کی علامت اس طرح سے لی جاتی ہے کہ (ii) کے دائیں طرف جمع کی علامت ہو۔

مثال 13: $5x - 12y + 39 = 0$ کو درج ذیل اشکال میں تبدیل کریں:

(i) ڈھلوان قاطع شکل (ii) دو قاطع شکل (iii) عام شکل

(iv) نقطہ ڈھلوان شکل (v) دو نقاطی شکل (vi) سمیٹرک شکل

حل:

(i) $12y = 5x + 39$ یا $y = \dfrac{5}{12}x + \dfrac{39}{12}$, $m = \dfrac{5}{12}$ ، $c = \dfrac{39}{12}$ y-قاطع

(ii) $5x - 12y = 39$ یا $\dfrac{5x}{-39} + \dfrac{12y}{39} = 1$ یا $\dfrac{x}{-39/5} + \dfrac{y}{39/12} = 1$

جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔

(iii) $5x - 12y = -39$

دونوں اطراف $\pm\sqrt{5^2+12^2} = \pm 13$ سے تقسیم کریں۔ چوں کہ دائیں طرف مثبت عدد ہونا چاہیے اس لیے ہمیں منفی علامت لینی ہو گی۔

یہاں $\dfrac{5x}{-13} + \dfrac{12y}{13} = 3$ عام شکل میں مساوات ہے۔

(iv) $\left(\dfrac{-39}{5}, 0\right)$ خط پر ایک نقطہ اور $\dfrac{5}{12}$ اس کی ڈھلوان ہے۔ خط کی مساوات کو اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$y - 0 = \frac{5}{12}\left(x + \frac{39}{5}\right)$$

(v) $\left(0, \dfrac{39}{12}\right)$ خط پر دوسرا نقطہ ہے۔ $\left(\dfrac{-39}{5}, 0\right)$ اور $\left(0, \dfrac{39}{12}\right)$ میں سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے:

$$\frac{y-0}{0-\frac{39}{12}} = \frac{x+\frac{39}{5}}{\frac{-39}{5}-0}$$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

(vi) جیسا کہ $\tan\alpha = \frac{5}{12} = m$، پس $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ اور $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

خط کا ایک نقطہ $\left(\frac{-39}{5}, 0\right)$ ہے۔

سمیٹرک شکل میں مساوات ہے۔ (فرض کریں) $\dfrac{x + \frac{39}{5}}{\frac{12}{13}} = \dfrac{y - 0}{\frac{5}{13}} = r$

مشق 7.2

1۔ دیے گئے نقاط سے بننے والے خط کی ڈھلوان اور جھکاؤ معلوم کریں:

(i) $(-2, 4)\ ; (5, 11)$　　(ii) $(3, -2)\ ; (2, 7)$　　(iii) $(4, 6)\ ; (4, 8)$

2۔ ڈھلوان کے ذریعے یہ ظاہر کریں کہ درج ذیل نقاط ایک ہی خط پر ہیں:

(i) $A(-1, -3)\ ; B(1, 5)\ ; C(2, 9)$　　(ii) $P(4, -5)\ ; Q(7, 5)\ ; R(10, 15)$

(iii) $L(-4, 6)\ ; M(3, 8)\ ; N(10, 10)$　　(iv) $X(a, 2b)\ ; Y(c, a + b);\ Z(2c - a, 2a)$

3۔ k معلوم کریں جب کہ $A(7, 3)$ اور $B(k, -6)$ کو ملانے والا خط اور $C(-4, 5)$ ؛ $D(-6, 4)$ کو ملانے والا خط:

(i) متوازی ہوں　　(ii) عمودی ہوں

4۔ ڈھلوان کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مثلث اپنے راس $A(6, 1)$ ، $B(2, 7)$ اور $C(-6, -7)$ کے ساتھ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بناتی ہے۔

5۔ نقاط کے دو جوڑے دیے گئے ہیں۔ معلوم کریں کہ آیا ان نقاط سے بننے والے دو خطوط

(i) متوازی ہیں　　(ii) عمودی ہیں　　(iii) کچھ بھی نہیں ہیں۔

(a) $(1, -2), (2, 4)$ اور $(4, 1), (-8, 2)$　　(b) $(-3, 4), (6, 2)$ اور $(4, 5), (-2, -7)$

6۔ مساوات معلوم کریں۔

(a) $(7, -9)$ میں سے گزرنے والا افقی خط ہو　　(b) $(-5, 3)$ میں سے گزرنے والا عمودی خط ہو

(c) $A(-6, 5)$ سے گزرنے والا خط جس کی ڈھلوان 7 ہے

(d) $(8, -3)$ سے گزرنے والا خط جس کی ڈھلوان 0 ہے

(e) $(-8, 5)$ سے گزرنے والا خط جس کی ڈھلوان غیر واضح ہو　　(f) $(-5, -3)$ اور $(9, -1)$ سے گزرنے والا خط

(g) y- قاطع: 7– اور ڈھلوان 5　　(h) x- قاطع: 3– اور y- قاطع 4

(i) x- قاطع: 9– اور ڈھلوان 4–

7۔ نقاط $A(3, 5)$ اور $B(9, 8)$ کو ملانے والے قطعہ خط کے عمودی ناصف کی مساوات معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

8۔ $(-4, -6)$ سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ اس خط پر عمود ہو اور جس کی ڈھلوان $\frac{-3}{2}$ ہو۔

9۔ $(11, -5)$ سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ اس خط کے متوازی ہو جس کی ڈھلوان 24- ہو۔

10۔ درج ذیل مساواتوں میں سے ہر ایک کو ڈھلوان قاطع شکل، دو قاطع شکل اور عام شکل میں تبدیل کریں:

(a) $2x - 4y + 11 = 0$　　(b) $4x + 7y - 2 = 0$　　(c) $15y - 8x + 3 = 0$

11۔ درج ذیل ہر ایک میں چیک کریں کہ آیا دو خطوط:

(i) متوازی ہیں　　(ii) عمودی ہیں　　(iii) نامتوازی اور ناعمودی ہیں

(a) $2x + y - 3 = 0$; $4x + 2y + 5 = 0$

(b) $3y = 2x + 5$; $3x + 2y - 8 = 0$

(c) $4y + 2x - 1 = 0$; $x - 2y - 7 = 0$

12۔ $(-4, 7)$ سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ خط $2x - 7y + 4 = 0$ کے متوازی ہو۔

13۔ $(5, -8)$ سے گزرنے والے خط کی مساوات معلوم کریں جو $A(-15, -8)$ اور $B(10, 7)$ سے بننے والے خط پر عمود ہو۔

7.3 حقیقی زندگی میں محدداتی جیومیٹری کا اطلاق

(Applications of Coordinate Geometry in Real life Situations)

مثال14: نقشے پر ٹاؤن A کے محددات $(2, 3)$ اور ٹاؤن B کے محددات $(-4, -1)$ ہیں۔ دونوں ٹاؤن کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

حل: فاصلہ کا کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

قیمتوں کو درج کرنے سے

$$d = \sqrt{(-4-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} \approx 7.21$$

اس طرح ٹاؤن A اور ٹاؤن B کے درمیان فاصلہ تقریباً 7.21 ہے۔

مثال15: فرض کریں کہ دو شہروں، شہر A اور شہر B کے محددات $(3, 4)$ اور $(7, 1)$ نقشے پر ظاہر کیے گئے ہیں۔ دونوں شہروں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کریں۔

حل: فاصلہ کا کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(7-3)^2 + (1-4)^2}$$

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}$$

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

اس طرح شہر A اور شہر B کا درمیانی فاصلہ 5 ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال16: ایک انجینئر دریا کے کنارے پر دو مقامات کے درمیان پل بنا رہا ہے۔ فرض کریں کہ (2, 5) اور (8, 9) دو مقامات کے نقاط ہیں جہاں سے پل شروع اور ختم ہو گا۔ وسطی نقطہ کے محددات معلوم کریں جو پل کے مرکز کو ظاہر کریں۔

حل: وسطی نقطہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے

$$M = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{5+9}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{10}{2}, \frac{14}{2}\right) = (5, 7)$$

اس طرح پل کا مرکزی نقطہ کے محددات (5, 7) ہیں۔

Web version of PCTB textbook

مثال17: زمین کی تزئین و آرائش کرنے والا ایک مثلثی باغ ڈیزائن کر رہا ہے جس کے کونے $A(2, 3)$ ، $B(5, 7)$ اور $C(6, 2)$ پر ہیں۔ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔

حل: ہر ضلع کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے فاصلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(6-5)^2 + (2-7)^2}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} = 5.10$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(6-2)^2 + (2-3)^2}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} = 4.12$$

اس طرح اضلاع کی لمبائیاں درج ذیل ہیں:

$$m\overline{AB} = 5\,,\quad m\overline{BC} \approx 5.10\,,\quad m\overline{AC} \approx 4.12$$

مثال18: ایک پائلٹ کو شہر $A(50, 60)$ سے شہر $B(120, 150)$ تک سفر کرنے کی ضرورت ہے۔ ہیڈنگ زاویہ کا تعین کریں کہ ہوائی جہاز کو مشرق کی سمت لے جانا چاہیئے۔

NOT FOR SALE-PESRP

حل: ہیڈنگ زاویہ ڈھلوان کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے:

$$m = \frac{150-60}{120-50} = \frac{90}{70} = \frac{9}{7}$$

فرض کریں کہ مطلوبہ زاویہ θ ہے پھر

$$\tan\theta = m = \frac{9}{7}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{9}{7}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}(1.2857)$$

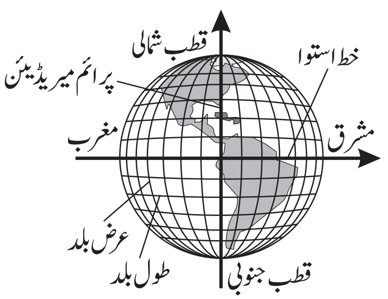
$$\theta \approx 52.13°$$

> **کیا آپ جانتے ہیں؟**
>
> **ایوی ایشن** ہوائی جہازوں، ہیلی کاپٹروں اور ڈرونز سمیت طیاروں کا آپریشن اور پرواز ہے۔
>
> **نیوی گیشن** گاڑی کے راستے کا تعین اور ایک جگہ سے دوسری جگہ تک کنٹرول کرنے کا عمل ہے۔

اس طرح ہوائی جہاز کو °52.13 مشرق سے شمال کی طرف ہیڈنگ زاویہ لینا چاہیے۔

عرض بلد پیمائش کرتا ہے کہ خط استوا سے کوئی مقام کتنا دور ہے۔ یہ خط استوا پر °0 سے °90 شمال (قطب شمالی پر) یا °90 جنوب (قطب جنوبی پر) تک ہے۔

طول بلد پیمائش کرتا ہے کہ کوئی مقام پرائم میریڈیئن (جو گرین وچ، لندن سے گزرتا ہے) سے کتنا دور ہے۔ یہ پرائم میریڈیئن میں °0 سے °180 مشرق اور °180 مغرب تک ہے۔



مثال 19: عبد الہادی نقطہ A (50° E طول بلد، 10° N عرض بلد) سے نقطہ B (60° E طول بلد، 20° N عرض بلد) تک سفر کر رہا ہے۔ عرض بلد اور طول بلد کے لحاظ سے اس کے سفر کا وسطی نقطہ معلوم کریں۔

حل: ہمیں دیا گیا ہے کہ نقطہ A (50° E طول بلد، 10° N عرض بلد)

نقطہ B (60° E طول بلد، 20° N عرض بلد)

عرض بلد کا وسطی نقطہ $= \frac{10° + 20°}{2} = 15°\,\text{N}$

طول بلد کا وسطی نقطہ $= \frac{50° + 60°}{2} = 55°\,\text{E}$

اس طرح عبد الہادی کے سفر کا وسطی نقطہ (55° E طول بلد، 15° N عرض بلد) ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال20: ایک زمین کی تزئین و آرائش کرنے والا $P(2, 3)$ سے $Q(8, 9)$ تک سیدھا راستہ ڈیزائن کر رہا ہے۔ راستے کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: فاصلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سیدھے راستے کی لمبائی معلوم کی جاسکتی ہے:

$$\text{فاصلہ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(8-2)^2 + (9-3)^2}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (6)^2}$$
$$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

لہٰذا راستے کی لمبائی تقریباً $6\sqrt{2}$ ہے۔

مشق 7.3

1۔ 2 دوستوں کے گھروں کو ایک گرڈ پر محددات (2, 6) اور (9, 12) کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔ اگر گرڈ کی اکائیاں کلو میٹر کو ظاہر کرتی ہوں تو ان کے گھروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

2۔ ایک سیدھی پگڈنڈی پر غور کریں جو نقطہ (5, 7) سے شروع ہوتی ہے اور نقطہ (15, 3) پر ختم ہوتی ہے۔ اس کے وسطی نقطہ کے محددات معلوم کریں۔

3۔ ایک معمار ایک پارک ڈیزائن کر رہا ہے جس میں دو عمارتوں کے محددات (10, 8) اور (4, 3) گرڈ پر واقع ہیں۔ عمارتوں کے درمیان فاصلہ میٹر میں معلوم کریں۔

4۔ ڈیلیوری ڈرائیور کو دو ڈیلیوری مقامات کے درمیان فاصلہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ ایک مقام شہر کے گرڈ کے نقشے پر (7, 2) اور دوسرا (12, 10) پر واقع ہے۔ دونوں مقامات کے درمیان فاصلہ کلو میٹر میں معلوم کریں۔

5۔ ریس ٹریک کے آغاز اور اختتامی نقاط کے محددات (3, 9) اور (9, 13) ہیں۔ ٹریک کا وسطی نقطہ کیا ہے؟

6۔ سڑک پر دو نقاط $A(3, 4)$ اور $B(7, 10)$ ہیں۔ سڑک کے وسطی نقطہ کے محددات معلوم کریں۔

7۔ ایک جہاز (12° N, 65° W) پر واقع پورٹ A سے پورٹ B تک (20° N, 45° W) جا رہا ہے۔ اگر جہاز زمین کی سطح پر مختصر ترین راستے پر سفر کرتا ہے، تو نقاط کے درمیان خط مستقیم کا فاصلہ معلوم کریں۔

8۔ فرح ایک مستطیل میدان کے گرد باڑ لگا رہی ہے جس کے کونوں کے محددات (0, 0)، (0, 5)، (8, 5) اور (8, 0) ہیں۔ اس کھیت کے احاطے کے لیے کتنی باڑ کی ضرورت ہو گی؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

9۔ ایک ہوائی جہاز شہر X (40° N, 100° W) سے شہر Y (50° N, 80° W) تک اڑ رہا ہے۔ محدداتی جیومیٹری کا استعمال کرتے ہوئے ان دو شہروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

10۔ زمین کا سروے کرنے والا ایک مستطیلی پلاٹ کو نشان زدہ کر رہا ہے جس کے کونوں کے محددات (3, 1) ، (3, 6) ، (8, 6) اور (8, 1) ہیں۔ اس مستطیلی پلاٹ کا احاطہ معلوم کریں۔

11۔ ایک مستطیلی باغ جس کے کونوں کے محددات $A(0, 0)$، $B(5, 0)$ ، $C(5, 3)$ اور $D(0, 3)$ ہیں۔ اس مستطیلی باغ کے گرد کتنی باڑ لگانے کی ضرورت ہوگی؟

جائزہ مشق 7

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) ڈھلوان قاطع شکل میں خط مستقیم کی مساوات اس طرح لکھی جاتی ہے:

(a) $y = m(x + c)$　(b) $y - y_1 = m(x - x_1)$
(c) $y = c + mx$　(d) $ax + by + c = 0$

(ii) دو متوازی خطوط کے میلان ہوتے ہیں:

(a) برابر　(b) صفر
(c) ایک دوسرے کے منفی ردعمل　(d) غیر واضح

(iii) اگر دو خطوط کی ڈھلوان کی ضرب 1– ہو تو خطوط ہوتے ہیں:

(a) متوازی　(b) عمودی　(c) ہم خط　(d) ایک جیسے

(iv) نقاط $P(1, 2)$ اور $Q(4, 6)$ کے درمیان فاصلہ ہوتا ہے:

(a) 5　(b) 6　(c) $\sqrt{13}$　(d) 4

(v) قطعہ خط کے سروں $(-2, 4)$ اور $(6, -2)$ کا وسطی نقطہ ہوتا ہے:

(a) (4, 2)　(b) (2, 1)　(c) (1, 1)　(d) (0, 0)

(vi) نقاط (1, 2) اور (4, 5) میں سے گزرنے والا خط ہے:

(a) $y = x + 1$　(b) $y = 2x + 3$　(c) $y = 3x - 2$　(d) $y = x + 2$

(vii) نقطہ ڈھلوان شکل میں خط کی مساوات ہے:

(a) $y = m(x + c)$　(b) $y - y_1 = m(x - x_1)$
(c) $y = c + mx$　(d) $ax + by + c = 0$

(viii) $2x + 3y - 6 = 0$ کی ڈھلوان قاطع شکل ہے:

(a) $y = \frac{-2}{3}x + 2$　(b) $y = \frac{2}{3}x - 2$

(c) $y = \frac{2}{3}x + 1$　(d) $y = \frac{-2}{3}x - 2$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ix) سمیٹرک شکل میں خط کی مساوات ہے:

(a) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$　　(b) $\frac{x-x_1}{1}+\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{1}$

(c) $\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=r$　　(d) $y-y_1=m(x-x_1)$

(x) عام شکل میں خط کی مساوات ہے:

(a) $y=mx+c$　　(b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

(c) $\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}$　　(d) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$

2۔ محدداتی مستوی پر نقاط $A(2, 3)$ اور $B(7, 8)$ کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

3۔ نقاط $(4, -2)$ اور $(-6, 3)$ سے مل کر بننے والے قطعہ خط کا وسطی نقطہ معلوم کریں۔

4۔ نقاط $(1, 2)$ اور $(4, 6)$ سے گزرنے والے خط کی ڈھلوان معلوم کریں۔

5۔ نقاط $(3, 7)$ اور $(5, 11)$ سے گزرنے والے خط کی مساوات $y = mx + c$ شکل میں معلوم کریں۔

6۔ اگر دو خطوط متوازی ہوں اور ایک خط کی ڈھلوان $\frac{2}{3}$ ہو تو دوسرے خط کی ڈھلوان معلوم کریں۔

7۔ ایک ہوائی جہاز کو شہر A پر محددات $(12, 5)$ سے شہر B پر محددات $(-4, 8)$ تک پرواز کرنے کی ضرورت ہے۔ ان دو شہروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

8۔ زمین کی تزئین و آرائش کے منصوبے میں راستہ کے محددات $(2, 3)$ اور $(10, 7)$ ہیں۔ اس راستے کے وسطی نقطہ کے محددات معلوم کریں۔

9۔ ایک ڈرون ایک مقام سے دوسرے مقام تک اُڑ رہا ہے جس کے محددات $(2, 3)$ اور $(10, 15)$ ہیں۔ اس خط کی ڈھلوان اور کل فاصلہ معلوم کریں۔

10۔ -3 کے میلان اور 2 کے y- قاطع والے خط کے لیے مساوات لکھیں:

(a) ڈھلوان قاطع شکل　　(b) نقطہ $(1, 2)$ کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ ڈھلوان شکل

(c) نقاط $(1, 2)$ اور $(4, -7)$ کا استعمال کرتے ہوئے دو نقطہ شکل

(d) قاطع شکل　　(e) سمیٹرک شکل　　(f) عام شکل

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ
8

منطق (Logic)

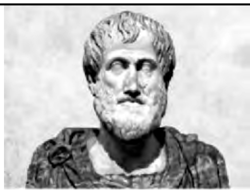
اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ریاضیاتی بیان اور اس کے ثبوت کو سمجھ سکیں۔
- کلیہ متعارفہ، قیاس اور مسئلے کے درمیان فرق واضح کر سکیں۔
- سادہ استخراجی ثبوتوں کو تشکیل دے سکیں۔[الجبرائی ثبوت جو یہ ظاہر کرنے کے لیے درکار ہوں کہ بائیں طرف برابر ہے دائیں طرف کے۔ مثلاً: $[(x-3)^2+5=x^2-6x+14$

تعارف (Introduction)

منطق استدلال کا ایک منظم طریقہ ہے جو کسی کو بیانات کے معانی کی تشریح کرنے، ان کی سچائی کو جانچنے اور موجودہ حقائق سے نئی معلومات اخذ کرنے کے قابل بناتا ہے۔ منطق کسی مسئلہ کو حل کرنے اور فیصلہ سازی میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔ ہم عام طور پر اپنی روزمرہ زندگی میں ریاضی کے معاملات میں منطق کا استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم اکثر مشاہدات یا تجربات کی محدود تعداد سے عمومی نتائج اخذ کرتے ہیں۔ ایک شخص ایک یا دو مرتبہ پینسلین کا ٹیکہ لگواتا ہے اور جلد ہی اس کے بعد ردعمل محسوس کرتا ہے۔ وہ عمومی طور پر نتیجہ اخذ کرتا ہے کہ وہ پینسلین کے لیے حساس ہے۔ اس طریقے سے نتائج اخذ کرنے کو استقراء (induction) کہتے ہیں۔ استقرائی استدلال قدرتی علوم میں بہت مددگار ہے، جہاں ہمیں بار بار کے تجربات یا مشاہدات پر انحصار کرنا پڑتا ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ ہمارا زیادہ تر علم استقراء پر مبنی ہوتا ہے۔ کئی مواقع پر، ہمیں اس کے برعکس طریقہ اختیار کرنا پڑتا ہے۔ ہمیں مانے ہوئے یا معروف حقائق سے نتائج اخذ کرنے ہوتے

تاریخ



منطق کی تاریخ کا آغاز ارسطو سے ہوا، جنہیں رسمی منطق کا بانی تصور کیا جاتا ہے۔ انہوں نے استقرائی استدلال کا ایک نظام مرتب کیا جسے "قیاسی منطق" کہا جاتا ہے، جو منطقی فکر کی بنیاد بنا۔ اس کے بعد اسٹوئک فلسفیوں نے تجویز منطق میں شراکت کی اور جسے منطقی تضاد کو دریافت کیا مثلاً Liar Paradox میں حصہ ڈالا اور مسائل پر تحقیق کی۔ قرونِ وسطیٰ کے دور میں پیٹر ایبلارڈ اور ولیم آف اوکھم جیسے سکالرز نے ارسطو کے کام کو وسعت دی اور معنیات اور نتائج کے نظریات متعارف کروائے۔ 19ویں صدی میں منطق نے جارج بول کے کام کے ذریعے ترقی پائی، جنہوں نے بولین الجبرا مرتب کیا، اور گوٹلوب فریگے نے جدید پیش گوئی منطق کو رسمی شکل دی۔ برٹرینڈ رسل اور الفریڈ نارتھ وائٹ ہیڈ نے اپنی اہم تصنیف پرنسپیا میتھمیٹیکا میں ریاضی کو منطق میں محدود کرنے کی کوشش کی۔ 20ویں صدی میں کرٹ گوڈل نے اپنے عدم تکمیل کے مسائل پیش کیے، جنہوں نے ریاضیاتی منطق کی تفہیم کو یکسر بدل دیا۔

Web version of PCTBtextbook

NOT FOR SALE-PESRP

ہیں۔ ہم اکثر وکلا یا ڈاکٹروں سے ان کی اچھی شہرت کی بنیاد پر مشورہ کرتے ہیں۔ اس قسم کے استدلال، یعنی ان مقدمات سے نتیجہ اخذ کرنا جو سچ مانے جاتے ہیں، کو استخراج کہتے ہیں۔ استخراج کی ایک عام مثال یہ ہے:

"تمام انسان فانی ہیں۔ ہم انسان ہیں۔ لہٰذا ہم بھی فانی ہیں۔" منطق کا مطالعہ کرنے کے لیے ہم بیان سے آغاز کرتے ہیں۔

8.1 بیان (Statement)

ایک جملہ یا ریاضیاتی عبارت جو درست یا غلط ہو سکتی ہے مگر دونوں نہیں ہو سکتے، کو بیان کہا جاتا ہے۔ یہ بات ریاضی اور دیگر سائنسی شعبوں میں درست ہے۔ مثال کے طور پر، بیان $a = b$ درست یا غلط ہو سکتا ہے۔ اسی طرح کوئی بھی طبعی یا کیمیائی نظریہ درست یا غلط ہو سکتا ہے۔ تاہم شماریاتی یا سماجی علوم میں بعض اوقات تمام بیانات کو دو باہمی خصوصی طبقات میں تقسیم کرنا ممکن ہوتا ہے۔ کچھ بیانات مثال کے طور پر، فیصلہ کُن ہو سکتے ہیں۔ ہم ایک ریاضیاتی بیان کو معلومات کی اکائی کے طور پر سوچ سکتے ہیں جو یا تو درست ہے یا غلط۔

یہاں ہم ریاضیاتی بیانات کی کچھ مثالوں پر بات کرتے ہیں جو سب درست ہیں۔

(i) کسی غیر صفر حقیقی عدد x اور صحیح اعداد m اور n کے لیے، ہم لکھتے ہیں: $x^m . x^n = x^{m+n}$

(ii) مثلث کے اندرونی زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔

(iii) دائرے کا محیط جس کا رداس r ہو، $2\pi r$ کے برابر ہوتا ہے۔

(iv) $Q \subseteq R$ (ناطق اعداد کا سیٹ حقیقی اعداد کے سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔)

(v) $\frac{22}{7} \notin Q'$

(vi) دو طاق اعداد کا مجموعہ ایک جفت عدد ہوتا ہے۔

(vii) $x = 2$ اور $x = 3$ کے لیے $x^2 - 5x + 6 = 0$

مزید برآں ہم کچھ ریاضیاتی بیانات کی مثالوں پر تبادلہ خیال کرتے ہیں جو سب غلط ہیں۔

(i) $3 + 4 = 8$

(ii) $Z \subseteq W$

(iii) تمام مساوی الساقین مثلثیں مساوی الاضلاع مثلثیں ہوتی ہیں۔

(iv) کوئی بھی دو حقیقی اعداد کے درمیان کوئی حقیقی عدد نہیں ہوتا ہے۔

(v) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{-1, -2, -3, -4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

(vi) اگر a اور b مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی ہیں، تو مستطیل کا رقبہ $(a \times b)$ $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(vii) کسی n-اضلاع والی کثیر الاضلاع کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $(n-1)\times180^\circ$ کے برابر ہوتا ہے۔

(viii) کسی بھی چوکور کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ 180° کے برابر ہوتا ہے۔

(ix) صحیح اعداد کا سیٹ متناہی ہوتا ہے۔

8.1.1 منطقی عمل کار (Logical Operators)

حروف p ، q وغیرہ بیانات کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیے جائیں گے۔ ذیل میں استعمال ہونے والی علامتوں کی ایک مختصر فہرست دی گئی ہے:

کیسے پڑھا جائے	علامتی جملے	کیسے پڑھا جائے	علامتیں
p نہیں p کی نفی	$\sim p$	نہیں	$\sim$
p اور q	$p\wedge q$	اور	$\wedge$
p یا q	$p\vee q$	یا	$\vee$
اگر p تب q p کا مطلب ہے q	$p\rightarrow q$	اگر . . . تب ,مطلب	$\rightarrow$
p صرف اور صرف q p برابر ہے q کے	$p\leftrightarrow q$	کے برابر ہے، صرف اور صرف	$\leftrightarrow$

8.1.2 علامات کے استعمال کی وضاحت (Explanation of the Use of the Symbols)

1۔ نفی (Negation)

جدول 1

p	$\sim p$
T	F
F	T

اگر p کوئی بھی بیان ہو تو اس کی نفی کو $\sim p$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جسے "p نہیں" پڑھا جاتا ہے۔ اس تعریف سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر p درست ہو تو $\sim p$ غلط ہو گا اور اگر p غلط ہو تو $\sim p$ درست ہو گا۔ p اور $\sim p$ کی ممکنہ صدق قیمتیں جدول 1 میں دی گئی ہیں جسے صدق جدول کہا جاتا ہے جہاں درست قیمت کو T سے ظاہر کیا جاتا ہے اور غلط قیمت کو F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

2۔ کنجکشن (Conjunction)

دو بیانات p اور q کے کنجکشن کو علامتی طور پر $p\wedge q$ (p اور q) لکھا جاتا ہے۔ کنجکشن کو صرف اس صورت میں درست سمجھا جاتا ہے جب دونوں بیانات درست ہوں۔ لہٰذا، $p\wedge q$ کی صدق قیمتیں جدول 2 میں دی گئی ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

جدول2

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال1: آیا کہ درج ذیل بیانات درست ہیں یا غلط۔

(i) لاہور پنجاب کا دارالحکومت ہے اور کوئٹہ بلوچستان کا دارالحکومت ہے۔

(ii) $4 < 5 \wedge 8 < 10$ (iii) $2+2=3 \wedge 6+6=10$

حل: واضح طور پر کنجکشن (i) اور (ii) درست ہیں جبکہ (iii) غلط ہے۔

3۔ ڈِس جنکشن (Disjunction)

جدول 3

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p اور q کے ڈِس جنکشن کو علامتی طور پر $p \vee q$ (p یا q) لکھا جاتا ہے۔ جب بیانات میں سے کم از کم ایک درست ہو تو ڈِس جنکشن $p \vee q$ کو درست سمجھا جاتا ہے۔ جب یہ دونوں غلط ہوں تو ان کو غلط سمجھا جائے گا۔ $p \vee q$ کی صدق قیمتیں جدول 3 میں دی گئی ہیں۔

مثال 2: 10 ایک مثبت عدد ہے یا 0 ایک ناطق عدد ہے۔ اس ڈِس جنکشن کی درست قیمت معلوم کریں۔

حل: چوں کہ دونوں بیانات درست ہیں، اس لیے ڈِس جنکشن درست ہے۔

مثال 3: مثلث کے دو قائمۃ الزاویے ہو سکتے ہیں یا لاہور سندھ کا دارالحکومت ہے۔ اس ڈِس جنکشن کی درست قیمت معلوم کریں۔

حل: دونوں بیانات غلط ہیں، ڈِس جنکشن غلط ہے۔

4۔ استنباط یا مشروط (Implication or conditional)

جدول 4

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

اگر کوئی مرکب بیان اس صورت میں ہو کہ "اگر p ہو تو q" ($p \to q$) جسے p مشروط q کے طور پر بھی لکھا جاتا ہے اسے استنباط یا مشروط بیان کہا جاتا ہے۔ p کو پیشرو یا مفروضہ کہا جاتا ہے اور q کو نتیجہ یا اختتام کہا جاتا ہے۔ ایک مشروط کو صرف اس وقت غلط سمجھا جاتا ہے جب مفروضہ درست ہو اور نتیجہ غلط ہو۔ دیگر تمام صورتوں میں مشروط کو درست سمجھا جاتا ہے۔ چنانچہ $p \to q$ کی صدق قیمتیں جدول 4 میں دی گئی ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

ہم ایک مثال کی مدد سے صورتحال کو واضح کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ مشروط جملے پر غور کریں:

اگر شخص A لاہور میں رہتا ہے، تو وہ پاکستان میں رہتا ہے۔

اگر پیشرو یا مفروضہ غلط ہو، یعنی A لاہور میں نہیں رہتا، تو وہ پھر بھی پاکستان میں رہ سکتا ہے۔ ہمارے پاس کوئی وجہ نہیں کہ یہ کہیں کہ وہ پاکستان میں نہیں رہتا۔ ہم اس لیے یہ نہیں کہہ سکتے کہ مشروطی جملہ غلط ہے۔ لہٰذا ہمیں اسے درست تصور کرنا ہوگا۔ اسی طرح، جب مشروطی جملے کا مفروضہ اور نتیجہ دونوں غلط ہوں، تو بیان کے ساتھ اختلاف کرنے کا کوئی جواز نہیں ہے۔

5۔ دوشرطی (Biconditional $p \leftrightarrow q$)

عبارت $p \to q \wedge q \to p$ کو مختصراً $p \leftrightarrow q$ لکھا جاتا ہے اور اسے دوشرطی یا برابری کہتے ہیں۔ یہ "p صرف اور صرف q" کے طور پر پڑھا جاتا ہے، "iff" کا مطلب "صرف اور صرف" ہوتا ہے۔ ہم اس کا صدق جدول بناتے ہیں۔ جدول 5 سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ $p \leftrightarrow q$ صرف اس وقت درست ہوتا ہے جب دونوں بیانات p اور q درست ہوں یا دونوں بیانات p اور q غلط ہوں۔

جدول 5

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

6۔ ایک دیے گئے مشروط جملے سے متعلق مشروط جملے

(Conditionals related with a given conditional)

اگر p اور q بیانات ہوں اور $p \to q$ ایک دیا گیا مشروط ہو، تب

(i) $q \to p$ کو $p \to q$ کا اُلٹ کہا جاتا ہے۔

(ii) $\sim p \to \sim q$ کو $p \to q$ کا معکوس کہا جاتا ہے۔

(iii) $\sim q \to \sim p$ کو $p \to q$ کا ضد مثبت کہا جاتا ہے۔

ان نئے مشروط جملوں کی صدق قیمتیں نیچے جدول 6 میں دی گئی ہیں۔

جدول 6

				دیا گیا مشروط	الٹ	معکوس	ضد مثبت
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جدول 6 سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ

(i) کوئی بھی مشروط اور اس کا ضد مثبت مساوی ہوتے ہیں اس لیے کسی بھی مسئلے کو اس کے ضد مثبت کو ثابت کر کے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(ii) اُلٹ اور معکوس ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

مثال 4: ثابت کریں کہ کسی بھی کائناتی سیٹ میں خالی سیٹ ϕ کسی بھی سیٹ A کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

حل: فرض کریں کہ U کائناتی سیٹ ہے۔ مشروط پر غور کریں

$$\forall x \in U, x \in \phi \rightarrow x \in A \qquad \ldots(i)$$

اس مشروط جملے کا مفروضہ غلط ہے کیوں کہ کوئی بھی $x \in U$، ϕ کا رکن نہیں ہے۔ لہٰذا یہ مشروط جملہ درست ہے۔

مثال 5: $[(p \rightarrow q) \wedge p]$ اور $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ کا صدق جدول بنائیں۔

حل: مطلوبہ صدق جدول 7 ذیل میں دیا گیا ہے۔

جدول 7

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

8.1.3 ریاضیاتی ثبوت (Mathematical Proof)

فرض کریں کہ فیاض جماعت نہم کا طالب علم ہے۔ ایک دن وہ شہر میں ٹریفک کی وجہ سے گھر دیر سے پہنچا۔ تاہم اس کے والد کو شک ہوا کہ فیاض اسکول نہیں گیا بلکہ اس نے دن کہیں اور گزارا۔ اپنے خدشات کو دور کرنے کے لیے اس کے والد نے پوچھا: "سچ بتاؤ؟ کیا تم آج اسکول گئے تھے؟" فیاض نے جواب دیا "جی ہاں، میں گیا تھا۔" پھر بھی شک میں مبتلا اس کے والد نے پوچھا: "تمہارے پاس کیا ثبوت ہے کہ تم اسکول گئے تھے؟" اپنے والد کو مطمئن کرنے کے لیے فیاض نے کہا کہ میرا ہم جماعت احمد میرے ساتھ اسکول گیا تھا اور آپ اس سے تصدیق کر سکتے ہیں۔ لیکن اس کے والد اس کی بات سے مطمئن نہیں ہوئے۔ اب وہ اپنے والد کے اس دعوے کو کیسے ثابت کرے گا کہ وہ اسکول گیا یا نہیں؟ اپنے والد کے اس دعوے کو دور کرنے کے لیے فیاض کو کچھ ثبوت پیش کرنا ہو گا جیسے کہ اس دن کی حاضری جو اسکول کے حاضری رجسٹر میں درج ہو یا اسکول کی سی سی ٹی وی فوٹیج جو یہ ثابت کرے کہ وہ واقعی اس دن اسکول میں موجود تھا۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

ایک اور صورت حال پر غور کریں آپ نے ایک موبائل فون خریدا ہے جس کی وارنٹی تقریباً ایک سال کی ہے۔ چند دن استعمال کرنے کے بعد آپ کا موبائل فون خراب ہو جاتا ہے تو آپ اسے موبائل کمپنی یا سروس فراہم کنندہ کے پاس لے جاتے ہیں۔ اگر آپ اپنے موبائل فون کی وارنٹی کا دعویٰ کرنا چاہتے ہیں تو گاہک کی خدمت کا نمائندہ آپ سے ثبوت طلب کرے گا۔ موبائل فون کی وارنٹی کا دعویٰ کرنے کے لیے آپ کو وارنٹی کارڈ بطور دستاویزی ثبوت کمپنی کے نمائندے کے سامنے پیش کرنا ہوگا۔ عام طور پر ہمیں اپنے روزمرہ کے معمولات میں بہت سے دعوؤں اور بیانات کو ثابت اور غلط ثابت کرنا پڑتا ہے۔ ریاضی میں ثبوت کسی بیان کی درستگی کی تصدیق فراہم کرتے ہیں جو ایک منطقی ترتیب کے ذریعے حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہیں۔

مثال 6: درج ذیل ریاضیاتی بیانات کو ثابت کریں۔

(a) اگر x ایک طاق عدد ہو تو x^2 بھی ایک طاق عدد ہوتا ہے۔

(b) دو طاق اعداد کا مجموعہ ایک جفت عدد ہوتا ہے۔

حل:

(a) فرض کریں کہ x ایک طاق عدد ہے۔ تو طاق عدد کی تعریف کے مطابق ہم x کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$x = 2k + 1$، جہاں $k \in Z$

اب $x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

فرض کریں کہ $m = 2k^2 + 2k \in Z$

پس $x^2 = 2m + 1$ جہاں $m \in Z$

اس لیے طاق عدد کی تعریف کی رو سے x^2 ایک طاق عدد ہے۔

> **نوٹ:**
> اگر x طاق ہو، تو اسے درج ذیل شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے:
> $x = 2k + 1$، جبکہ $k \in Z$

(b) فرض کریں کہ x اور y طاق اعداد ہیں۔ پھر طاق عدد کی تعریف کے مطابق، ہم x اور y کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں:

$x = 2k + 1$ اور $y = 2n + 1$ جب کہ $k, n \in Z$

اس لیے $x + y = (2k+1) + (2n+1)$

$= 2k + 2n + 1 + 1$

$= 2(k + n + 1) = 2m,$

جب کہ $k + n + 1 = m \in Z$

پس $x + y = 2m$ جہاں $m \in Z$

اس لیے جفت عدد کی تعریف کے مطابق $x + y$ ایک جفت عدد ہے۔

> **نوٹ:**
> اگر x ایک جفت صحیح عدد ہے تو x کو اس شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں: $x = 2k$ جبکہ $k \in Z$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 7: ثابت کریں کہ کوئی سے دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے لیے، $(A\cup B)' = A'\cap B'$

ثبوت: فرض کریں $x\in (A\cup B)'$

$\Rightarrow \quad x\notin (A\cup B)$

$\Rightarrow \quad x\notin A$ اور $x\notin B$

$\Rightarrow \quad x\in A'$ اور $x\in B'$

$\Rightarrow \quad x\in A'\cap B'$

لیکن $x\in (A\cup B)'$ ایک اختیاری رکن ہے

اس لیے $(A\cup B)'\subseteq A'\cap B' \quad \ldots$ (i)

اب فرض کریں $y\in A'\cap B'$

$\Rightarrow \quad y\in A'$ اور $y\in B'$

$\Rightarrow \quad y\notin A$ اور $y\notin B$

$\Rightarrow \quad y\notin (A\cup B)$

$\Rightarrow \quad y\in (A\cup B)'$

اس لیے $A'\cap B'\subseteq (A\cup B)' \quad \ldots$(ii)

مساوات (i) اور (ii) سے ثابت ہوا۔

$$(A\cup B)' = A'\cap B'$$

نوٹ:
سیٹ B، سیٹ A کا سب سیٹ ہوتا ہے اگر سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کا رکن بھی ہو۔ ریاضیاتی طور پر، ہم اسے اس طرح لکھتے ہیں:

$B\subseteq A$ اگر $\forall x\in B \Rightarrow x\in A$

8.1.4 مسئلہ، قیاس اور اصول متعارفہ (Theorem, Conjecture and Axiom)

پچھلے یونٹس میں ہم نے ریاضیاتی بیانات اور ان کے متعلقہ ثبوتوں کو معلوم کیا ہے۔ اب ہم ایک مزید جدید درست تصور کی طرف بڑھیں گے جسے مسئلہ کہا جاتا ہے۔ مسئلہ (theorem) ایک ریاضیاتی بیان ہے جسے سابقہ معلوم کردہ حقائق کی بنیاد پر درست ثابت کیا گیا ہو۔ مثال کے طور پر، درج ذیل بیانات مسئلے ہیں:

(i) **مسئلہ:** چوکور شکل کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $360°$ ہوتا ہے۔

(ii) **حساب کا بنیادی مسئلہ:** 1 سے بڑے ہر صحیح عدد کو اسے منفرد طور پر مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے جو جزوضربی کی ترتیب تک ہوتا ہے۔

(iii) **فرمیٹ (Format) کا آخری مسئلہ:** ایسے کوئی تین مثبت صحیح اعداد a، b، c نہیں ہیں جو مساوات $a^n + b^n = c^n$ کو درست ثابت کریں جب کہ $n\in N$ اور $n > 2$ ہو۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

ایک مشہور مسئلے کا نام 17 ویں صدی کے فرانسیسی ریاضی دان پیئر فرمیٹ (Pierre Fermat) کے نام پر رکھا گیا تھا۔ آیئے فرمیٹ کے آخری مسئلے کو n کی مخصوص قیمتوں کے لیے جانچیں اور دیکھیں کہ یہ کیسے لاگو ہوتا ہے۔ جب $n = 2$ ہو، تو بیان مختصر ہو کر $a^2 + b^2 = c^2$ بن جاتا ہے جس کے حل موجود ہیں۔ یہ مشہور فیثاغورث کا مسئلہ ہے۔ مثلاً، $3^2 + 4^2 = 5^2$ درست ہے کیوں کہ $9 + 16 = 25$۔

اب ہم $n = 3$ کے لیے اس بیان کا تجزیہ کرتے ہیں۔ بیان بن جاتا ہے $a^3 + b^3 = c^3$۔

صدیوں کی تلاش کے باوجود ایسا کوئی صحیح عدد حل کے طور پر نہیں مل سکا اور وائلز کا ثبوت اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ ایسا کوئی عددی حل موجود نہیں ہے۔ مثال کے طور پر، $5^3 \neq 4^3 + 3^3$ کیوں کہ $125 \neq 91$ فرمیٹ نے دعویٰ کیا تھا کہ وہ اس مسئلے کو ثابت کر سکتے ہیں، لیکن دیکھیں کہ اس کی کتاب کا حاشیہ اس طرح کی معنی خیز وضاحت کے لیے بہت قلیل تھا۔ اپنے دعوے کے باوجود، بہت سے ریاضی دانوں کو اس مسئلے کو صدیوں تک ثابت کرنا مشکل لگا۔ یہ مسئلہ 350 سال سے زیادہ عرصے تک بغیر ثابت کیے باقی رہا اور ریاضی کے سب سے مشہور مسائل میں سے ایک بن گیا۔ 1993 میں، اینڈریو وائلز (Andrew Wiles) نے پرنسٹن یونیورسٹی سے اعلان کیا کہ وہ سات سال سے زیادہ عرصے تک کام کرنے کے بعد اس کا ثبوت پیش کر رہے ہیں، جو سینکڑوں صفحات پر مشتمل تھا۔ یہ واضح کرتا ہے کہ کچھ حقائق پر مبنی بیانات فوری طور پر واضح نہیں ہوتے ہیں۔

قیاس (Conjecture): قیاس ایک ریاضیاتی بیان یا مفروضہ ہوتا ہے جو مشاہدات کی بنیاد پر درست مانا جاتا ہے لیکن ابھی تک اس کا ثبوت فراہم نہیں کیا گیا۔ ریاضی میں، قیاسات اکثر مفروضوں کے طور پر کام کرتے ہیں اور اگر کوئی قیاس کو درست ثابت کر دیا جائے تو وہ مسئلہ بن جاتا ہے۔ اس کے برعکس، اگر ایسا ثبوت مل جائے جو اسے غلط ثابت کرے، تو یہ قیاس غلط ثابت ہو جاتا ہے۔

یہاں ایک اور معروف بیان پیش کیا جا رہا ہے جس نے اتنی شہرت حاصل کی کہ اسے ایک شناخت کے طور پر نام دیا گیا۔ اسے پہلی بار اٹھارہویں صدی میں ایک جرمن ریاضی دان کرسچین گولڈباچ (Christian Goldbach) نے پیش کیا اور یہ قیاس گولڈباچ کے نام سے جانا جاتا ہے۔ گولڈباچ کا قیاس یہ بیان کرتا ہے کہ:

بیان (Statement): 2 سے بڑا ہر صحیح جفت عدد، دو مفرد اعداد کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

ہمیں اس بات پر اتفاق کرنا ہوگا کہ یہ قیاس یا تو درست ہے یا غلط۔ تجرباتی شواہد کی بنیاد پر یہ درست معلوم ہوتا ہے، کیوں کہ بہت سے جفت اعداد جو 2 سے بڑے ہیں، واقعی دو مفرد اعداد کے مجموعے کے طور پر لکھے جا سکتے ہیں: مثلاً $2 + 2 = 4$ ، $3 + 3 = 6$ ، $7 + 5 = 12$ اور دیگر۔ تاہم اس بات کا امکان موجود ہے کہ کوئی بڑا جفت عدد ایسا ہو جو دو مفرد اعداد کے مجموعے کے طور پر ظاہر نہ کیا جا سکے۔ اگر ایسا کوئی عدد پایا جاتا ہے تو یہ قیاس غلط ثابت ہو جائے گا۔ گولڈباچ نے یہ مسئلہ تقریباً 260 سال پہلے پیش کیا تھا اور تب سے اب تک کی گئی وسیع کوششوں کے باوجود اس قیاس کو درست یا غلط ثابت کرنے کے لیے کوئی ثبوت نہیں ملا۔

بہر حال، قیاس ایک معتبر ریاضیاتی بیان ہے کیوں کہ یہ یا تو درست ہوتا ہے یا غلط۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

ریاضی میں ہمیں اکثر ایسی صورتحال کا سامنا کرنا پڑتا ہے جہاں کسی دیے گئے بیان کو بغیر ثابت کیے اس کی سچائی کا تعین کرنا ضروری ہوتا ہے۔ اگلے مرحلے میں ہم اسی بیان کا مطالعہ کریں گے جسے اصول متعارفہ کہتے ہیں۔

ایک اصول متعارفہ ایک ریاضیاتی بیان ہے جسے ہم بغیر کسی ثبوت یا دلیل کے درست مانتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں یہ بیانات بنیادی حقائق ہیں جو مزید خیالات کے لیے نقطہ آغاز فراہم کرتے ہیں اور روزمرہ کے تجربات پر مبنی ہوتے ہیں۔ مزید برآں ان بیانات کے خلاف کوئی ثبوت موجود نہیں ہوتا۔ مثال کے طور پر، درج ذیل اصول متعارفہ کے بیانات ہیں۔

اصول متعارفہ: کسی دیے گئے نقطہ سے لامحدود خطوط گزر سکتے ہیں۔

اقلیدس کا اصول متعارفہ: کوئی سے بھی دو نقاط سے صرف ایک خط کھینچا جاسکتا ہے۔

پیانو کا کلیہ متعارفہ: ہر قدرتی عدد کا ایک جانشین ہوتا ہے جو خود بھی ایک قدرتی عدد ہوتا ہے۔

ایکسٹینالٹی کا اصول متعارفہ: دو سیٹ برابر ہوتے ہیں اگر ان میں ایک جیسے ارکان ہوں۔

قوت سیٹ کا اصول متعارفہ: کسی بھی سیٹ میں تمام تحتی سیٹوں کا ایک سیٹ موجود ہوتا ہے۔

درج بالا مثال پر غور کرنے سے ہمیں معلوم ہو گا کہ ان بیانات کو ثابت کرنے کی ضرورت نہیں ہے مثال کے طور پر ہمارا وجدان تسلیم کرتا ہے کہ لامحدود خطوط ایک نقطہ سے گزر سکتے ہیں، اس لیے اسے ثابت کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

اصول متعارفہ کو کبھی کبھار اصول موضوعہ بھی کہا جاتا ہے۔ دونوں اصول متعارفہ اور اصول موضوعہ ایسے بیانات کو بیان کرتے ہیں جنھیں بغیر کسی ثبوت کے سچ سمجھا جاتا ہے۔ تاہم اصول موضوعہ خاص طور پر جیومیٹری سے متعلق ہوتے ہیں جب کہ اصول متعارفہ وسیع تر ریاضیاتی سیاق وسباق سے تعلق رکھتے ہیں۔ اگلے مرحلے میں ہم ایک مسئلے کے بیان کو ثابت کرنے جارہے ہیں۔

مثال 8: ثابت کریں کہ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ جبکہ a، b، c اور d غیر صفر حقیقی اعداد ہیں۔

حل:

$$\text{L.H.S} = \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times 1+\frac{c}{d}\times 1 \qquad \text{(ضربی ذاتی عنصر)}$$

$$=\frac{a}{b}\times\left(d\times\frac{1}{d}\right)+\frac{c}{d}\times\left(b\times\frac{1}{b}\right) \qquad \text{(ضربی معکوس)}$$

$$=\frac{a}{b}\times\frac{d}{d}+\frac{c}{d}\times\frac{b}{b} \qquad \left(\because\ a\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b}\right)$$

$$=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db} \qquad \left(\because\ \frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\right)$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

$= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ (∵ حقیقی عدد کی خاصیت مبادلہ $ab = ba$)

$= ad \times \frac{1}{bd} + bc \times \frac{1}{bd}$ $\left(\because \ a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}\right)$

$= (ad + bc) . \frac{1}{bd}$ (خاصیت تقسیمی)

$= \frac{(ad + bc)}{bd} = \text{R.H.S}$

اس لیے $\Rightarrow \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

پس ثابت ہوا۔ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

8.1.5 استخراجی ثبوت (Deductive Proof)

جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا تھا کہ استخراجی طریقہ استدلال ایک ایسا طریقہ ہے جس کے ذریعے ایسے مقدمات سے نتائج اخذ کیے جاتے ہیں جو درست سمجھے جاتے ہیں۔ اگر مقدمات درست ہوں تو نتیجہ بھی لازمی طور پر درست ہو گا۔ مثال کے طور پر تمام انسانوں کو زندہ رہنے کے لیے سانس لینے کی ضرورت ہوتی ہے۔ احمد ایک انسان ہے۔ لہٰذا احمد بھی زندہ رہنے کے لیے سانس لے رہا ہے۔

اسی طرح ریاضی میں الجبری جملوں کے استخراجی ثبوت ایک طریقہ ہے جس کے ذریعے کسی ریاضیاتی بیان کی درستی کو معلوم اصولوں، مسئلوں اور اصول متعارفہ یا پہلے سے ثابت شدہ بیانات پر مبنی منطقی استدلال کے ذریعے ثابت کیا جاتا ہے۔ استخراجی طریقہ استدلال الجبرا میں عمومی طور پر مطابقت کی تصدیق اور مساواتوں کو حل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال 9: ثابت کریں $(x + 1)^2 + 7 = x^2 + 2x + 8$

حل: ثبوت:

$\text{L.H.S} = (x + 1)^2 + 7$

$= (x + 1)(x + 1) + 7$ $(\because \ x^m . x^n = x^{m+n})$

$= x.(x + 1) + 1. (x + 1) + 7$ (دائیں خاصیت تقسیمی)

$= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 + 7$ (دائیں خاصیت تقسیمی)

$= x^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot x + 1 + 7$ (∵ خاصیت مبادلہ اور $x^m.x^n = x^{m+n}$)

$= x^2 + (1 + 1)x + 8$ (بائیں خاصیت تقسیمی)

$= x^2 + 2x + 8$

$= \text{R.H.S}$

اس لیے $\Rightarrow \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

پس ثابت ہوا۔ $(x + 1)^2 + 7 = x^2 + 2x + 8$

مثال 10: ہر مرحلے کا جواز پیش کر کے ثابت کریں کہ $\frac{45x + 15}{15} = 3x + 1$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

حل: ثبوت:

$$L.H.S = \frac{45x+15}{15}$$

$$= \frac{1}{15} \times (45x+15) \qquad \left(\because \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \times a\right)$$

$$= \frac{1}{15} \times (15 \times 3x + 15 \times 1)$$ (∵ ضربی ذاتی عنصر)

$$= \frac{1}{15} \times 15(3x + 1)$$ (∵ خاصیت تقسیمی)

$$= \left(\frac{1}{15} \times 15\right) \cdot (3x+1)$$ (∵ خاصیتِ تلازم)

$$= 1 \cdot (3x + 1)$$ (∵ ضربی معکوس)

$$= 3x + 1 = R.H.S$$ (∵ ضربی ذاتی عنصر)

$$\Rightarrow \quad L.H.S = R.H.S$$

$$\frac{45x+15}{15} = 3x + 1$$ پس ثابت ہوا۔

مشق 8

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا بیان اکثر استقرائی استدلال سے متعلق ہوتا ہے؟

(a) بار بار کیے گئے تجربات پر مبنی (b) اگر اور صرف اگر کے بیانات

(c) بیان کو ایک مسئلے کے ذریعے ثابت کیا گیا ہو (d) عمومی اصولوں پر مبنی

(ii) درج ذیل میں سے کون سا جملہ استخراجی استدلال کی وضاحت کرتا ہے؟

(a) محدود مشاہدات سے عمومی نتائج (b) بار بار کیے گئے تجربات پر مبنی

(c) معلومات کی اکائیوں پر مبنی جو درست ہوں (d) معروف حقائق سے نتیجہ اخذ کرنا

(iii) درج ذیل میں سے کون سا بیان درست ہے؟

(a) صحیح اعداد کا سیٹ متناہی ہوتا ہے۔

(b) کسی بھی چوکور کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ °180 ہوتا ہے۔

(c) $\frac{22}{7} \notin Q'$

(d) تمام مساوی الاضلاع مثلثیں مساوی الساقین مثلثیں ہوتی ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(iv) "چولہا جل رہا ہے" کے بیان کی نفی کے لیے درج ذیل میں سے کون سا بیان بہترین ہے؟

(a) چولہا نہیں جل رہا ہے (b) چولہا مدھم ہے
(c) چولہا ہلکی آنچ پر بدل جاتا ہے (d) یہ جل رہا ہے اور نہیں جل رہا ہے

(v) دونوں بیانات p اور q کا کنجکشن اس وقت درست ہوتا ہے جب:

(a) p اور q دونوں غلط ہوں (b) p اور q دونوں درست ہوں
(c) صرف q درست ہو (d) صرف p درست ہو

(vi) ایک مشروط کو صرف اس صورت میں غلط سمجھا جاتا ہے جب:

(a) مفروضہ درست ہو اور نتیجہ غلط ہو (b) نتیجہ درست ہو اور مفروضہ غلط ہو
(c) صرف مفروضہ درست ہو (d) صرف نتیجہ غلط ہو

(vii) $q \rightarrow p$ کا ضد مثبت برابر ہے:

(a) $q \rightarrow \sim p$ (b) $\sim q \rightarrow p$
(c) $\sim p \rightarrow \sim q$ (d) $\sim q \rightarrow \sim p$

(viii) بیان "2 سے بڑا ہر صحیح عدد دو مفرد اعداد کا مجموعہ ہے" یہ ہے:

(a) مسئلہ (b) قیاس
(c) اصول متعارفہ (d) اصول موضوعہ

(ix) بیان "کسی بھی دو نقاط سے ایک خط کھینچا جا سکتا ہے" یہ ہے:

(a) مسئلہ (b) قیاس
(c) اصول متعارفہ (d) منطق

(x) بیان "ایک مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے" یہ ہے:

(a) اُلٹ (b) مسئلہ
(c) اصول متعارفہ (d) مشروط

2۔ درج ذیل مشروط کے اُلٹ، معکوس اور ضد مثبت لکھیے۔

(i) $\sim p \rightarrow q$ (ii) $q \rightarrow p$ (iii) $\sim p \rightarrow \sim q$ (iv) $\sim q \rightarrow \sim p$

3۔ درج ذیل کا صدق جدول لکھیں۔

(i) $\sim(p \vee q) \vee (\sim q)$ (ii) $\sim(\sim q \vee \sim p)$ (iii) $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

4۔ ایک ریاضیاتی بیان اور اس کے ثبوت میں فرق واضح کریں۔ دو مثالیں دیجیے۔

5۔ ایک مسئلہ اور اصول متعارفہ میں کیا فرق ہے؟ ہر ایک کی مثالیں دیجیے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

6۔ ریاضیاتی ثبوتوں میں منطقی استدلال کی اہمیت کیا ہے؟ اپنی بات کو واضح کرنے کے لیے ایک مثال دیجیے۔

7۔ یہ بتائیں کہ آیا دیے گئے بیان ایک اصول متعارفہ، قیاس یا مسئلہ ہیں اور اپنی دلیل کی وضاحت کریں۔

(i) کوئی سے دو نقاط میں سے صرف ایک خط گزرتا ہے۔

(ii) ہر جفت عدد 2 سے بڑے دو مفرد اعداد کے مجموعے کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔

(iii) مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

8۔ درج ذیل الجبری جملوں کے لیے سادہ استخراجی ثبوتوں کو وضع کریں اور ثابت کریں کہ بائیں طرف برابر ہے دائیں طرف کے:

(i) ثابت کریں کہ $(x-4)^2+9=x^2-8x+25$

(ii) ثابت کریں کہ $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$

(ii) ثابت کریں کہ $(x+5)^2-(x-5)^2=20x$

9۔ ہر مرحلے کی وضاحت کرتے ہوئے درج ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $\dfrac{4+16x}{4}=1+4x$ (ii) $\dfrac{6x^2+18x}{3x^2-27}=\dfrac{2x}{x-3}$

(iii) $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-3x-10}=\dfrac{x+5}{x-5}$

10۔ فرض کریں کہ x ایک صحیح عدد ہے۔ اگر x ایک طاق عدد ہو تو $9x+4$ ایک طاق عدد ہو گا۔

11۔ فرض کریں کہ x ایک صحیح عدد ہے۔ اگر x ایک طاق عدد ہو تو $7x+5$ ایک جفت عدد ہو گا۔

12۔ درج ذیل بیانات کو ثابت کریں۔

(i) اگر x ایک طاق صحیح عدد ہو تو ثابت کریں کہ x^2-4x+6 ایک طاق عدد ہے۔

(ii) اگر x ایک جفت صحیح عدد ہو تو ثابت کریں کہ x^2+2x+4 ایک جفت عدد ہے۔

13۔ ثابت کریں کہ کوئی سے بھی دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے لیے، $(A\cap B)'=A'\cup B'$

14۔ اگر x اور y مثبت حقیقی اعداد ہوں اور $x^2<y^2$ ہو تو $x<y$

15۔ ثابت کریں کہ مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

16۔ اگر a، b اور c غیر صفر حقیقی اعداد ہوں تو ثابت کریں کہ:

(i) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$ (ii) $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ (iii) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ 9

متشابہ اشکال (Similar Figures)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- متشابہ کثیر الاضلاع اشکال کی پہچان کر سکیں اور متشابہ کثیر الاضلاع اشکال کا رقبہ اور حجم معلوم کر سکیں۔
- متشابہ اشکال اور متشابہ اجسام کے رقبے اور حجم کے تعلق کو استعمال کرتے ہوئے مسائل حل کر سکیں۔
- حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کر سکیں جو منظم کثیر الاضلاع مثلثوں اور متوازی الاضلاع سے متعلق ہوں (جیسا کہ عمارات کے ڈیزائن، جنگلہ لگانا، فرش لگانا، رنگ کرنا اور کمروں میں قالین بچھانا)۔

تعارف (Introduction)

مماثلت کا تصوّر قدیم یونانیوں کی تاریخ تک جاتا ہے جہاں پر یونانی ریاضی دان خاص طور پر اقلیدس نے جیومیٹری کے بنیادی اصول وضع کیے۔ اُس کے تخلیقی کام "عناصر" میں اقلیدس نے جیومیٹری کی بشمول متشابہ مثلثان اور کثیر الاضلاع کے نظریے کی بنیاد رکھی۔ اقلیدس کے مزید کام نے جدید جیومیٹری کی بنیاد رکھی اور مماثلت کے نظریہ نے ریاضی کی بہت سی شاخوں بشمول تکونیات اور الجبرا میں مرکزی حیثیت حاصل کی۔

9.1 کثیر الاضلاع کی مماثلت (Similarity of Polygons)

> **یاد رکھیے!**
> تین یا تین سے زیادہ اضلاع والی بند شکل کو کثیر الاضلاع کہا جاتا ہے۔

متشابہ اشکال ایک جیسی ہوتی ہیں۔ لیکن ضروری نہیں کہ اُن کی جسامت ایک جیسی ہو۔ دو کثیر الاضلاع متشابہ ہوتی ہیں اگر ان کے متناظرہ زاویے برابر اور متناظرہ اضلاع متناسب میں ہوں (یعنی متناظرہ اضلاع کی نسبتیں برابر ہوتی ہیں) اس کا مطلب ہے اگر دو کثیر الاضلاع متشابہ ہوں تو ایک کثیر الاضلاع دوسری کثیر الاضلاع کا متناسب عکس ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر تمام متساوی الاضلاع مثلثیں ایک دوسری کے متشابہ ہوتی ہیں۔ کیوں کہ ان کے زاویے مقدار میں برابر اور اضلاع کی پیمائش متناسب ہوتی ہے۔

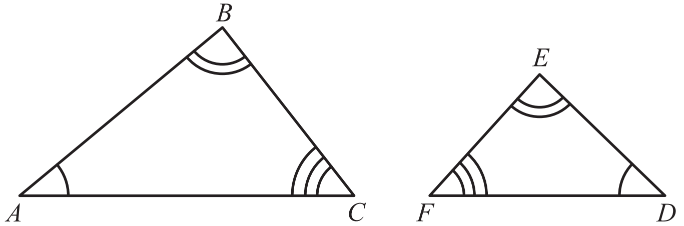
9.1.1 متشابہ مثلثان کی پہچان (Identification of Similar Triangles)

(i) اگر دو مثلثوں کی دی ہوئی مطابقت میں ایک مثلث کے دو زاویے دوسری مثلث کے دو متناظرہ زاویوں کے متماثل ہوں تو ہر ایک مثلث کا تیسرا زاویہ بھی متماثل ہو گا کیوں کہ زاویے ایک جیسے ہیں اس لیے مثلثیں متشابہ ہوں گی۔ متشابہ کی علامت '$\sim$' ہے۔

مثلاً اگر دو مثلثوں ABC اور DEF کی مطابقت میں

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

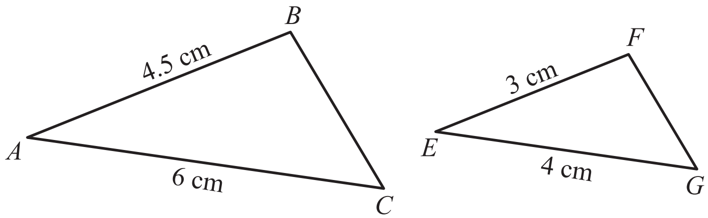


$m\angle A = m\angle D$
$m\angle B = m\angle E$
$m\angle C = m\angle F$

پس $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(ii) اگر دو مثلثوں کی دی ہوئی مطابقت میں دو متناظرہ اضلاع کی نسبت اور ان کا درمیانی زاویہ برابر ہوں تو مثلثیں متشابہ ہوں گی۔

$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta EFG$ میں $m\angle ABC = m\angle EFG$ اور متناظرہ اضلاع کی نسبتیں:



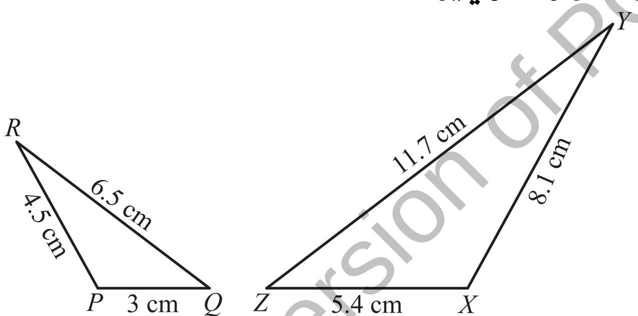
$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{EF}} = \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2}$$

اور $$\frac{m\overline{AC}}{m\overline{EG}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

پس مثلثان ABC اور EFG متشابہ ہیں۔

(iii) اگر دو مثلثوں کی دی ہوئی مطابقت میں تمام متناظرہ اضلاع کی نسبتیں برابر ہوں تو مثلثیں متشابہ ہوں گی۔

مثلثان PQR اور XZY کے درمیان مطابقت میں متناظرہ اضلاع کی نسبتیں یہ ہیں:



$$\frac{m\overline{PQ}}{m\overline{XZ}} = \frac{m\overline{QR}}{m\overline{YZ}} = \frac{m\overline{PR}}{m\overline{XY}}$$

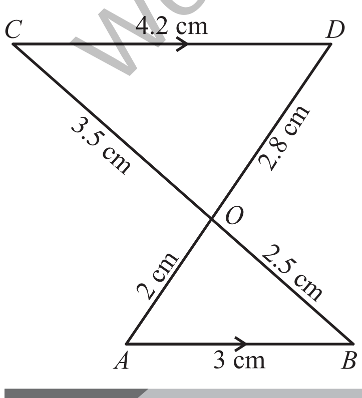
$$\frac{3}{5.4} = \frac{6.5}{11.7} = \frac{4.5}{8.1}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5}{9} = \frac{5}{9}$$

پس مثلثان PQR اور XYZ متشابہ ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

اضلاع کے متناسب کا مطلب ہے ایک ضلع اس کے دوسرے متناظرہ ضلع کا k گنا ہوتا ہے۔



مثال 1: اگر متناظرہ اضلاع کا ایک جوڑا دوسرے کے متوازی ہو تو دو مثلثیں متشابہ ہوں گی جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ مثلاً دی ہوئی شکل میں $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ کے متوازی ہے۔

$m\angle AOB = m\angle DOC$ (راسی زاویے)

$m\angle A = m\angle D$ (متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے)

$m\angle B = m\angle C$ (متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے)

حل: چوں کہ تینوں متناظرہ زاویے مقدار میں برابر ہیں۔ پس $\Delta OAB \sim \Delta ODC$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

متناظرہ اضلاع کی نسبتیں مقدار میں برابر ہوتی ہیں۔ یعنی

$$\frac{m\overline{OA}}{m\overline{OD}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{DC}} = \frac{m\overline{OB}}{m\overline{OC}}$$

$$\frac{2}{2.8} = \frac{3}{4.2} = \frac{2.5}{3.5}$$

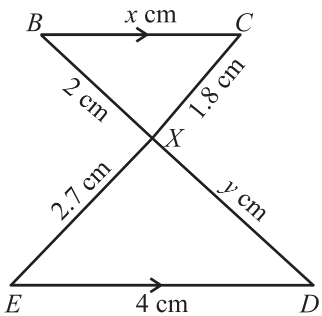
$$\frac{5}{7} = \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

پس مثلثان OAB اور ODC متشابہ ہیں۔

مثال 2: مثلثان XBC اور XDE میں x اور y کی مقداریں معلوم کریں۔

حل: چوں کہ $\overline{ED}$ ، $\overline{BC}$ کے متوازی ہے۔ اس لیے مثلثان XBC اور XDE متشابہ ہیں۔

پس متناظرہ اضلاع کی نسبتیں درج ذیل ہیں۔



$$\frac{m\overline{XB}}{m\overline{XD}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{XC}}{m\overline{XE}}$$

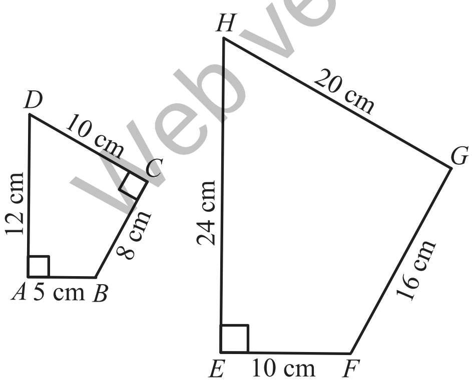
$$\frac{2}{y} = \frac{x}{4} = \frac{1.8}{2.7}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{1.8}{2.7} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1.8}{2.7} \times 4 = 2.67\,\text{cm}$$

$$\frac{2}{y} = \frac{1.8}{2.7} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2.7}{1.8} \times 2 = 3\ \text{cm}$$

9.1.2 چوکور کی مماثلت (Similarity of Quadrilaterals)

مثال 3: چوکور $ABCD$ کے اضلاع کی مقداریں $m\overline{AB} = 5\text{cm}$ ، $m\overline{BC} = 8\text{cm}$ ، $m\overline{CD} = 10\ \text{cm}$ ، $m\overline{AD} = 12\text{cm}$ اور اس کے زاویے $m\angle A = 90°$ ، $m\angle B = 120°$ اور $m\angle C = 90°$ ہیں اور چوکور $EFGH$ کے اضلاع کی مقداریں $m\overline{EF} = 10\ \text{cm}$ ، $m\overline{FG} = 16\text{cm}$ ، $m\overline{GH} = 20\text{cm}$ اور $m\overline{EH} = 24\text{cm}$ اس کے زاویے $m\angle E = 90°$ ، $m\angle F = 120°$ ، $m\angle H = 60°$ ہیں تو ثابت کریں کہ چوکور $ABCD$ اور چوکور $EFGH$ متشابہ ہیں۔



حل: ہم دیکھتے ہیں چوکور $ABCD$ میں

$$m\angle D = 360° - (90° + 120° + 90°) = 60°$$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

چوکور $EFGH$ میں $m\angle G = 360° - (90° + 120° + 60°) = 90°$

اب دیکھیں کہ اگر دو چوکوروں کے متناظرہ زاویے مقدار میں برابر ہوں تو

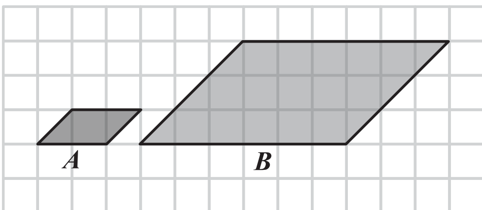
$m\angle C = m\angle G = 90°$, $m\angle B = m\angle F = 120°$, $m\angle A = m\angle E = 90°$ اور $m\angle D = m\angle H = 60°$

پھر متناظرہ اضلاع کی نسبتیں دیکھیں۔

$\overline{AB}$ کی $\overline{EF}$ سے نسبت : $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{EF}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\overline{BC}$ کی $\overline{FG}$ سے نسبت : $\frac{m\overline{BC}}{m\overline{FG}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$\overline{CD}$ کی $\overline{GH}$ سے نسبت : $\frac{m\overline{CD}}{m\overline{GH}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $\overline{AD}$ کی $\overline{EH}$ سے نسبت : $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{EH}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

چوں کہ دو چوکوروں کے متناظرہ زاویے مقدار میں برابر ہیں اور متناظرہ اضلاع متناسب ہیں ($\frac{1}{2}$ نسبت کے ساتھ) اس لیے چوکور $ABCD$ اور چوکور $EFGH$ متشابہ ہیں۔



مثال 4: دو متوازی الاضلاع میں دو اضلاع کا درمیانی زاویہ $45°$ ہو تو معلوم کریں کہ کیا دونوں متوازی الاضلاع متشابہ ہیں؟

حل: چوں کہ متوازی الاضلاع کے متناظرہ زاویے مقدار میں برابر اور متصلہ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔ اس لیے دونوں متوازی الاضلاع میں متناظرہ زاویے ($45°$ ، $135°$ ، $45°$ اور $135°$) مقدار میں برابر ہیں۔ پس دونوں متوازی الاضلاع متشابہ ہیں۔

چھوٹی متوازی الاضلاع کے قاعدہ کی مقدار $b_1 = 2$ اکائیاں

بڑی متوازی الاضلاع کے قاعدہ کی مقدار $b_2 = 6$ اکائیاں

چھوٹی متوازی الاضلاع کے عمود کی مقدار $h_1 = 1$ اکائی

بڑی متوازی الاضلاع کے عمود کی مقدار $h_2 = 3$ اکائیاں

متناظرہ اضلاع کی لمبائیوں کی نسبتیں برابر ہوتی ہیں۔ یعنی کہ $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{3}$ اور $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

پس $\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2}$

مثال 5: منظم مثمن کا احاطہ 48 cm ہے۔ ایک دوسری مثمن کے اضلاع کی لمبائیوں پہلی مثمن کا 1.2 گنا ہیں۔ دوسری منظم مثمن کے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

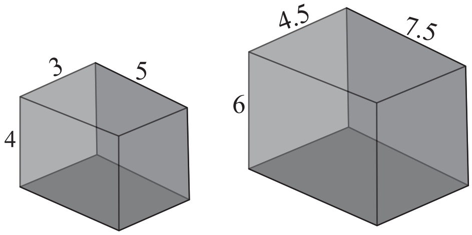
حل: پہلی منتظم مثمن کے احاطہ کی مقدار $= 48 \text{ cm}$

پہلی منتظم مثمن کے ضلع کی لمبائی $= \frac{48}{8} = 6 \text{ cm}$

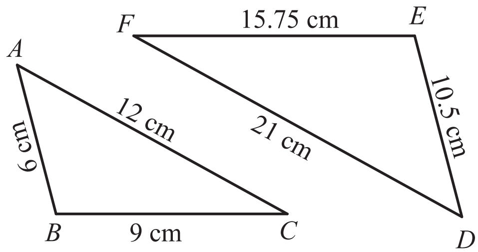
دوسری منتظم مثمن کے ضلع کی لمبائی $= 6 \times 1.2 = 7.2 \text{ cm}$

مشق 9.1

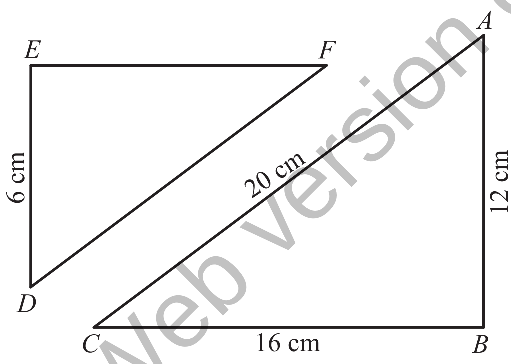
1۔ معلوم کریں کہ کیا دیے گئے اجسام متشابہ ہیں؟ تمام لمبائیاں cm میں ہیں۔



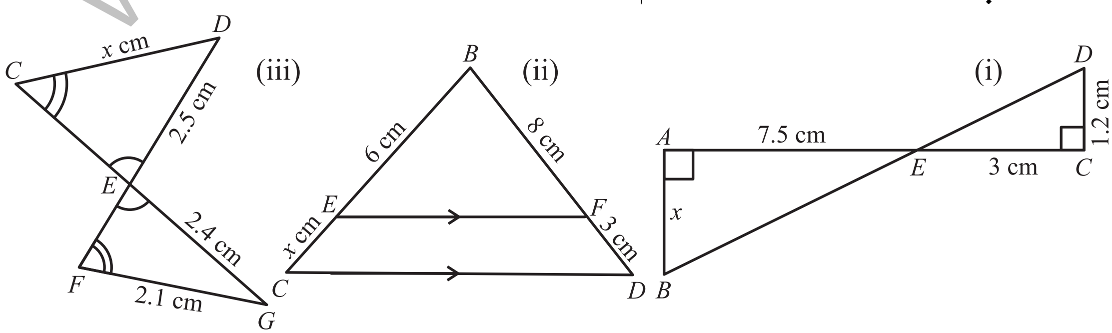
2۔ مثلث ABC میں اضلاع کی لمبائیاں۔
$m\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ ، $m\overline{BC} = 9 \text{ cm}$ اور $m\overline{CA} = 12 \text{ cm}$
اور مثلث DEF میں اضلاع کی لمبائیاں $m\overline{FD} = 21 \text{cm}$ ،
$m\overline{EF} = 15.75 \text{cm}$ اور $m\overline{DE} = 10.5$ ہیں۔
ثابت کریں کہ $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ متشابہ ہیں۔



3۔ سامنے دی گئی شکل میں $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ،
$m\overline{AB} = 12 \text{ cm}$ ، $m\overline{AC} = 20 \text{ cm}$
اور $m\overline{BC} = 16 \text{ cm}$ ہے ۔ $\triangle DEF$ میں
$m\overline{DE} = 6 \text{ cm}$ ہے ۔ $\overline{DF}$ اور $\overline{EF}$ کی
لمبائیاں معلوم کریں۔

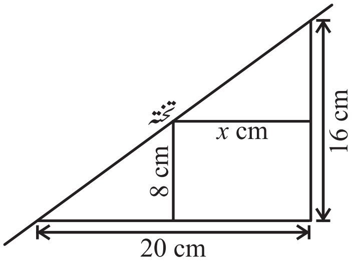


4۔ نیچے دی گئی ہر ایک شکل میں x کی قیمت معلوم کریں۔



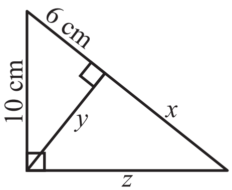
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



5۔ لکڑی کا ایک تختہ سیدھا سیڑھی کے اوپر رکھا گیا ہے جس کی چوڑائی 20 cm اور گہرائی 16 cm ہے۔ ایک مستطیلی صندوق جس کی اونچائی 8 cm اور چوڑائی x cm ہے۔ تختے کے نیچے سیڑھی پر رکھا گیا ہے۔ x کی قیمت معلوم کریں۔

6۔ ایک آدمی جس کا قد 1.8 m ہے۔ اُس کے سائے کی لمبائی 0.76 m ہے اگر عین اُسی وقت ایک ٹیلی فون کے کھمبے کا سایہ 3 m ہو تو کھمبے کی اونچائی معلوم کریں۔



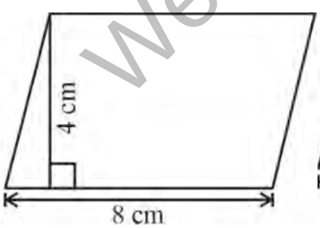
7۔ دی ہوئی شکل میں x، y اور z کی قیمتیں معلوم کریں۔

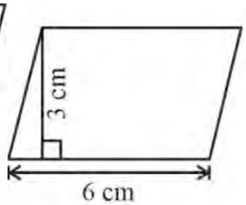
8۔ ایک متساوی الساقین ذوزنقہ $ABCD$ بنایئے۔ جس میں $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ اور $m\overline{AB} > m\overline{CD}$، وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ اس طرح کھینچیں کہ وہ ایک دوسرے کو نقطہ E پر قطع کرتے ہوں۔ ثابت کیجیے $\triangle ABE$ اور $\triangle CDE$ متشابہ ہیں۔ اگر $m\overline{AB} = 8\ \text{cm}$، $m\overline{CD} = 4\ \text{cm}$ اور $m\overline{AE} = 3\text{cm}$ ہو تو $\overline{CE}$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

9۔ ایک منظم بارہ اضلاع والی شکل کی لمبائیاں $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے جزو ضربی کی نسبت سے کم کی گئی ہیں۔ اگر اصل منظم بارہ اضلاع والی شکل کا احاطہ 72 cm ہو تو چھوٹی بارہ اضلاع والی شکل کے ضلع کی مقدار معلوم کریں۔

9.2 متشابہ اشکال کا رقبہ (Area of Similar Figures)

دو متوازی الاضلاع جن کے متناظرہ قاعدوں کی لمبائیاں بالترتیب 6 cm اور 8 cm اور متناظرہ ارتفاع کی لمبائیاں 3 cm اور 4 cm ہیں اور ان کی لمبائیوں کے درمیان 3 اور 4 کی نسبت ہے۔





یعنی $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{3}{4}$

چھوٹی متوازی الاضلاع کا رقبہ A_1 = قاعدہ × ارتفاع

$= 6 \times 3 = 18\ \text{cm}^2$

بڑی متوازی الاضلاع کا رقبہ A_2 = قاعدہ × ارتفاع

$= 8 \times 4 = 32\ \text{cm}^2$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

$$\text{رقبوں میں نسبت} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$$

جب کہ متشابہ اشکال کے رقبے A_1 اور A_2 اور دو متناظرہ اضلاع کی لمبائیاں ℓ_1 اور ℓ_2 ہیں۔

پس کسی بھی دو متشابہ اشکال کے رقبوں میں نسبت ان اشکال کے متناظر اضلاع کی نسبت کے مربع کے برابر ہوتی ہے۔

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$$

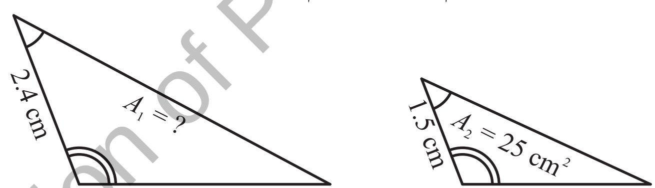
چوں کہ ہر ایک لمبائی دوسری کا k گنا ہے۔

$\frac{\ell_1}{\ell_2} = k$ ہو تو $\frac{A_1}{A_2} = k^2$

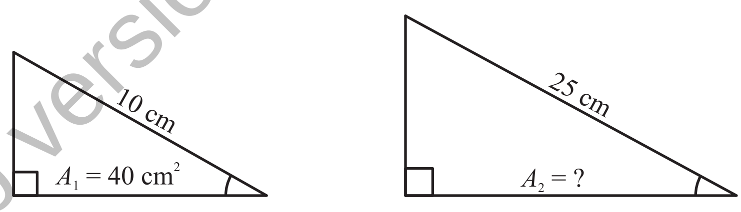
یعنی رقبہ A_1 رقبہ A_2 کا k^2 گنا ہے۔ اور k متناسبی عنصر کہلاتا ہے۔

مثال6: درج ذیل اشکال میں نامعلوم مقداریں معلوم کریں۔

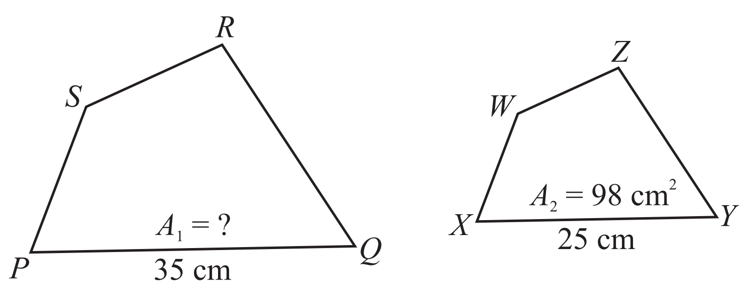
(i)



(ii)

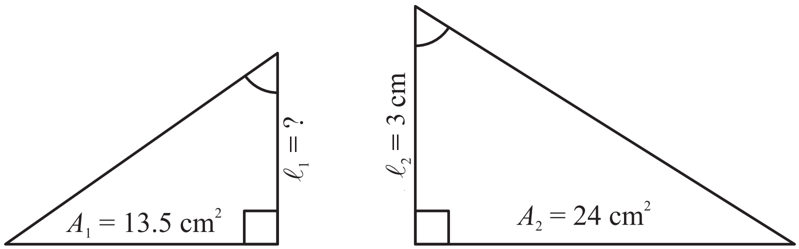


(iii) چوکور $PQRS$ اور چوکور $XYZW$ متشابہ ہیں جب کہ $m\overline{PQ} = 35\text{cm}$ اور $m\overline{XY} = 25\text{cm}$

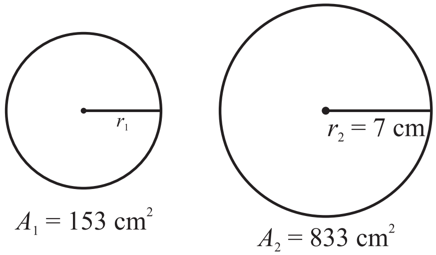


Web version of PCTB textbook

(iv)



(v)



حل: (i) چوں کہ دو متناظرہ زاویوں کے جوڑے برابر ہیں یعنی مثلثیں متشابہ ہیں۔ ہم متشابہ اشکال کے رقبوں کی نسبتوں کا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$$

یہاں $\ell_1 = 2.4$ cm ، $\ell_2 = 1.5$ cm ، $A_2 = 25$ cm^2 ، $A_1 = ?$

$$\frac{A_1}{25} = \left(\frac{2.4}{1.5}\right)^2$$

$$\frac{A_1}{25} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

$$A_1 = \frac{64}{25} \times 25 = 64\ cm^2$$

(ii) کلیہ کی مدد سے

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$$

یہاں $\ell_1 = 10$ cm ، $\ell_2 = 25$ cm ، $A_1 = 40$ cm^2 ، $A_2 = ?$

$$\frac{40}{A_2} = \left(\frac{10}{25}\right)^2$$

$$\frac{40}{A_2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

$$\frac{40}{A_2} = \frac{4}{25}$$

$$A_2 = 40 \times \frac{25}{4} = 250 \text{ cm}^2$$

(iii) یہ دیا گیا ہے کہ چوکور $PQRS$ چوکور $XYZW$ کے متشابہ ہے۔

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$$

$A_2 = 98\,\text{cm}^2$ ، $A_1 = ?$ ، $\ell_2 = 25$ cm ، $\ell_1 = 35$ cm

$$\frac{A_1}{98} = \left(\frac{35}{25}\right)^2$$

$$\frac{A_1}{98} = \left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$A_1 = \frac{49}{25} \times 98 = 192.08 \text{ cm}^2$$

(iv) چوں کہ دونوں مثلثوں میں دو متناظرہ زاویوں کے جوڑے مقدار میں برابر ہیں۔ اس لیے مثلثیں متشابہ ہیں۔

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$$

$A_2 = 24\text{ cm}^2$ ، $A_1 = 13.5\text{ cm}^2$ ، $\ell_2 = 3$ cm ، $\ell_1 = ?$

$$\frac{13.5}{24} = \left(\frac{\ell_1}{3}\right)^2$$

$$\frac{135}{240} = \left(\frac{\ell_1}{3}\right)^2$$

$$\frac{9}{16} = \left(\frac{\ell_1}{3}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{\ell_1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}}$$ (جذر لینے سے)

$$\frac{\ell_1}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\ell_1 = \frac{9}{4}$$

$$= 2.25\,\text{cm}$$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(v) متشابہ کرّوں کے لیے

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$$

یہاں $r_1 = ?$ ، $r_2 = 7\text{ cm}$ ، $A_1 = 153\text{ cm}^2$ ، $A_2 = 833\text{ cm}^2$

$$\frac{153}{833} = \left(\frac{r_1}{7}\right)^2$$

$$\frac{9}{49} = \left(\frac{r_1}{7}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{r_1}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{49}}$$ (جذر لینے سے)

$$\frac{r_1}{7} = \frac{3}{7} \Rightarrow r_1 = 3\text{ cm}$$

مثال 7: دو کثیر الاضلاع کے متناظرہ اضلاع کی نسبت $\frac{3}{5}$ ہے اگر چھوٹی کثیر الاضلاع کا رقبہ 54 cm^2 ہو تو بڑی کثیر الاضلاع کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: دو متشابہ کثیر الاضلاع کے رقبوں کی نسبت ان کے متناظرہ اضلاع کی نسبت کا مربع ہے۔

پس $\dfrac{\text{بڑی کثیر الاضلاع کا رقبہ}}{\text{چھوٹی کثیر الاضلاع کا رقبہ}} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

اس لیے بڑی کثیر الاضلاع کا رقبہ $= \frac{25}{9} \times 54 = 150\text{ cm}^2$

مثال 8: اگر $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ ہو تو ثابت کریں کہ مثلثان ABC اور ADE متشابہ ہیں۔

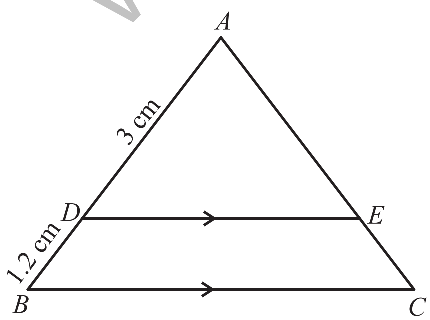
(i) اگر $m\overline{AB} = 3\text{cm}$ اور $m\overline{BD} = 1.2\text{cm}$ ہو تو ΔABC اور ΔADE کے رقبوں میں نسبت معلوم کریں۔

(ii) اگر ΔADE کا رقبہ 125cm^2 ہو تو ΔABC اور ذوزنقہ $BCED$ کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: چوں کہ $m\angle A = m\angle A$ (مشترک)، $m\angle B = m\angle D$ اور

$m\angle C = m\angle E$ (متوازی اضلاع $\overline{BC}$ اور $\overline{DE}$ کے متناظرہ زاویے)

پس ΔABC متشابہ ہے ΔADE سے۔



(i) اضلاع کی نسبت $= \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AD}} = \dfrac{3+1.2}{3} = \dfrac{4.2}{3} = \dfrac{7}{5}$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

$$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}}{\Delta ADE \text{ کا رقبہ}} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$$

(ii) ΔADE کا رقبہ $= 125 \text{ cm}^2$

$$\frac{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}}{125} = \frac{49}{25}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{49}{\cancel{25}} \times \cancel{125}^{5} = 245 \text{ cm}^2$$

ذوزنقہ $BCED$ کا رقبہ $=$ ΔABC کا رقبہ $-$ ΔADE کا رقبہ

$= 245 - 125 = 120 \text{ cm}^2$

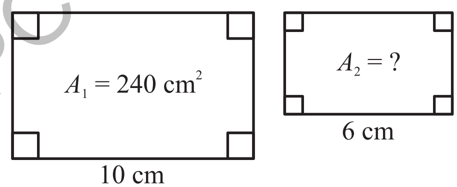
مشق نمبر 9.2

1۔ متشابہ اشکال کے رقبوں کی نسبت معلوم کریں اگر اُن کی متناظرہ لمبائیوں کی نسبت درج ذیل ہوں۔

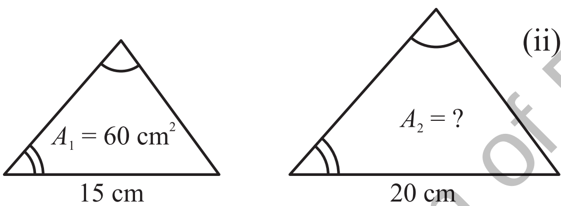
(i) 1:3 (ii) 3:4 (iii) 2:7 (iv) 8:9 (v) 6:5

2۔ درج ذیل اشکال میں نامعلوم مقداریں معلوم کریں۔

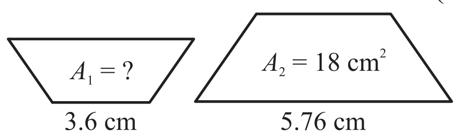
(i)



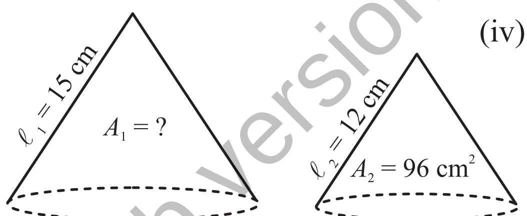
(ii)



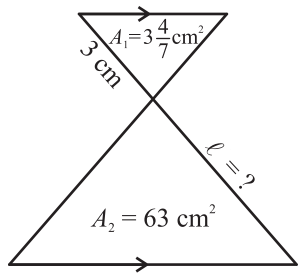
(iii)



(iv)



(v)

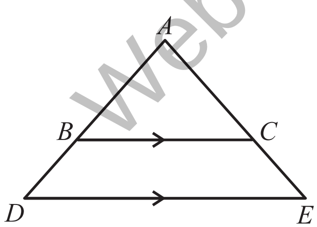


3۔ ΔABC کا رقبہ 36cm^2 ہے اور

$m\overline{BD} = 4$ cm ، $m\overline{AB} = 6$ cm

(a) ΔADE کا رقبہ معلوم کریں۔

(b) ذوزنقہ $BCED$ کا رقبہ معلوم کریں۔



4۔ ΔABC اور ΔDEF سکیل $k = 3$ متناسبی عامل کے ساتھ متشابہ ہیں اگر ΔABC کا رقبہ 50 cm^2 ہو تو ΔDEF کا رقبہ معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

5۔ چوکور $ABCD$ اور چوکور $EFGH$ سکیل فیکٹر $k = \frac{1}{4}$ کے ساتھ متشابہ ہیں۔ اگر چوکور $ABCD$ کا رقبہ $64\ cm^2$ ہو تو چوکور $EFGH$ کا رقبہ معلوم کریں۔

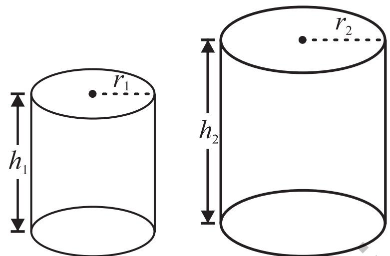
6۔ دو متشابہ مثلثوں کے رقبے $16cm^2$ اور $25cm^2$ ہیں۔ متناظرہ اضلاع کے جوڑے کی نسبت معلوم کریں۔

7۔ دو مشابہ مثلثوں کے رقبے $144\ cm^2$ اور $81cm^2$ ہیں اگر بڑی مثلث کے قاعدہ کی لمبائی $30\ cm$ ہو تو چھوٹی مثلث کے متناظرہ قاعدہ کی لمبائی معلوم کریں۔

8۔ ایک منظم سات اضلاع والی شکل ایک بڑی منظم سات اضلاع والی شکل میں محصور ہے اور بڑی سات اضلاع والی شکل کے ہر ایک ضلع کی لمبائی چھوٹی سات اضلاع والی شکل کے ہر ایک ضلع کا 1.7 گنا ہے۔ اگر چھوٹی سات اضلاع والی شکل کا رقبہ $100\ cm^2$ ہو تو بڑی سات اضلاع والی شکل کا رقبہ معلوم کریں۔

9.3 متشابہ اجسام کا حجم (Volume of Similar Solids)

دو اجسام اسی وقت متشابہ ہوتے ہیں اگر اُن کی شکل ایک جیسی ہو لیکن ممکنہ حد تک جسامتیں مختلف ہوں اور اگر اُن کے متناظرہ اضلاع کی لمبائیاں متناسب ہوں یعنی متناظرہ لمبائیوں کی نسبت برابر ہو۔ مثال کے طور پر



دو سلنڈر متشابہ ہوں گے اگر $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2}$

اگر $r_1 = 4\ cm$ ، $r_2 = 5\ cm$ ، $h_1 = 8\ cm$ ، $h_2 = 10\ cm$

تو $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{5}$ اور $\frac{h_1}{h_2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

چھوٹے سلنڈر کا حجم

$$V_1 = \pi r_1^2 h_1$$
$$= \pi \times 4^2 \times 8$$
$$= 128\pi\ cm^3$$

بڑے سلنڈر کا حجم

$$V_2 = \pi r_2^2 h_2$$
$$= \pi \times 5^2 \times 10$$
$$= 250\ \pi\ cm^3$$

حجموں کی نسبت $= \frac{V_1}{V_2} = \frac{128\pi}{250\pi} = \frac{64}{125} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$

پس $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3$ یا $= \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$

پس دو متشابہ اجسام کے حجموں کی نسبت اُن کے متناظرہ اضلاع کی لمبائیوں کی نسبت کے مکعب کے برابر ہوتی ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3$$

چوں کہ ہر ایک لمبائی دوسری کا k گنا ہے۔

$$\frac{\ell_1}{\ell_2}=k \quad \text{پھر} \quad \frac{V_1}{V_2}=k^3$$

یعنی حجم V_1 حجم V_2 کا k^3 گنا ہے۔ k ایک متناسبی اکائی ہے۔

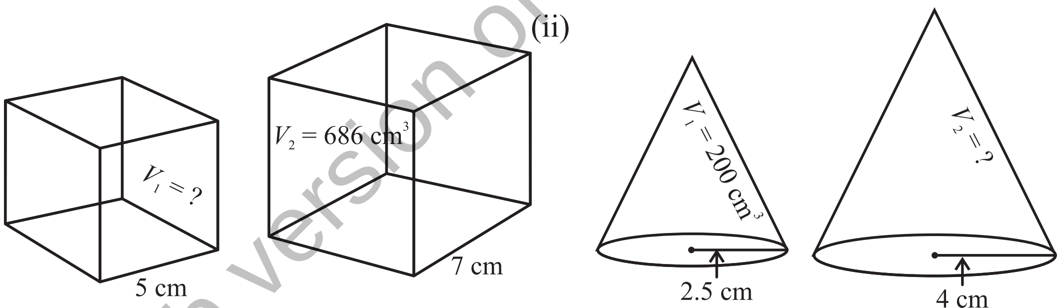
چوں کہ کسی چیز کی کمیت اس کے حجم کے متناسب ہے۔ اس لیے دو متشابہ اجسام کی کمیتوں کی نسبت اُن اجسام کے حجموں کی نسبتوں کے برابر ہوتی ہے۔ اگر دو متشابہ اجسام کی کمیتیں w_1 اور w_2 اور اُن کے حجم V_1 اور V_2 ہوں تو

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{w_1}{w_2}$$

اس لیے

$$\frac{w_1}{w_2}=\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3$$

مثال 9: نیچے دیے گئے متشابہ اجسام میں نامعلوم مقداریں معلوم کریں۔



حل: (i) $\ell_1 = 2.5$ cm ، $\ell_2 = 4$ cm

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3$$

$$\frac{200}{V_2}=\left(\frac{2.5}{4}\right)^3$$

$$\frac{200}{V_2}=\left(\frac{5}{8}\right)^3$$

$$V_2 = 200\times\frac{512}{125}$$

$$V_2 = 819.2\ cm^3$$

Web version of PCTB textbook
NOT FOR SALE-PESRP

(ii) کلیہ $\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3$ استعمال کرنے سے

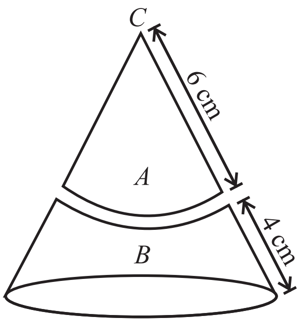
$$\frac{V_1}{686}=\left(\frac{5}{7}\right)^3 \qquad \left[\begin{array}{l}\ell_1=5\text{ cm},\ \ell_2=7\text{ cm}\\ V_1=?,\ V_2=686\text{ cm}^3\end{array}\right]$$

$$\frac{V_1}{686}=\frac{125}{343}$$

$$V_1=\frac{125}{343}\times 686$$

$$=250\text{ cm}^3$$

مثال 10: ایک مجسم کون C کو دو حصوں A اور B میں اس طرح کاٹا گیا ہے کہ اس کے ڈھلوانی کنارے 6 cm اور 4 cm ہیں۔ نسبت معلوم کریں:



(i) کون A اور کون C کے قاعدے کے قطروں میں

(ii) کون A اور کون C کے قاعدے کے رقبوں میں

(iii) کون A اور کون C کے حجم میں

(iv) اگر کون A کا حجم 72cm^3 ہو تو کون B کا حجم معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کون A کا قطر $=d_1$

کون C کا قطر $=d_2$

دونوں کونوں کے متشابہ ہونے کی وجہ سے متناظرہ لمبائیوں کی نسبت برابر ہوتی ہے۔

(i) $\therefore \quad \frac{d_1}{d_2}=\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{6}{10}$

$=\frac{3}{5}$ یعنی $\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{3}{5}$

(ii) $\frac{\text{کون } A \text{ کے قاعدہ کا رقبہ}}{\text{کون } C \text{ کے قاعدہ کا رقبہ}}=\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

(iii) $\frac{\text{کون } A \text{ کا حجم}}{\text{کون } C \text{ کا حجم}}=\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(iv) $\quad$ کون A کا حجم $= V_1 = 72\ \text{cm}^3$

کون C کا حجم $= V_2 = ?$

اس لیے $\quad \dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3$

$$\frac{72}{V_2} = \frac{27}{125}$$

$$V_2 = \frac{72 \times 125}{27} = 333\frac{1}{3}\ \text{cm}^3$$

کون C کا حجم $-$ کون A کا حجم $=$ ٹھوس B کا حجم

$$= 333\frac{1}{3} - 72 = 261\frac{1}{3}\ \text{cm}^3$$

مثال 11: چاولوں کی ایک بوری جس کی اونچائی 60 cm ہے اس کا وزن 50 kg ہے۔ اگر اُسی طرح کی بوری کی اونچائی 90 cm ہو تو اس میں چاولوں کا وزن معلوم کریں۔

حل: چاولوں کی چھوٹی بوری کا وزن $= w_1 = 50\ \text{kg}$

چھوٹی بوری کی اونچائی $= h_1 = 60\ \text{cm}$

چاولوں کی بڑی بوری کا وزن $= w_2 = ?$

بڑی بوری کی اونچائی $= h_2 = 90\ \text{cm}$

کلیہ استعمال کرنے سے $\quad \dfrac{w_1}{w_2} = \left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^3$

$$\frac{50}{w_2} = \left(\frac{60}{90}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{50}{w_2} = \frac{8}{27}$$

$$w_2 = \frac{27 \times 50}{8} = 168.75\ \text{kg}$$

مثال 12: دو متشابہ سلنڈر نما کین کی متناظرہ لمبائیوں میں نسبت 3:2 ہے۔

(i) بڑے سلنڈر نما کین کی سطح کا رقبہ 67.5m^2 ہے۔ چھوٹے سلنڈر نما کین کی سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

(ii) چھوٹے سلنڈر نما کین کا حجم 132m^3 ہے۔ چھوٹے سلنڈر نما کین کا حجم معلوم کریں۔

حل: (i) بڑے کین کی سطح کا رقبہ $= A_1 = 67.5\ \text{m}^2$

چھوٹے کین کی سطح کا رقبہ $= A_2 = ?$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

متناظرہ لمبائیوں میں نسبت $= \dfrac{\ell_1}{\ell_2} = \dfrac{3}{2}$

متشابہ اشکال کے رقبہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے $= \dfrac{A_1}{A_2} = \left(\dfrac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$

$$\frac{67.5}{A_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 67.5 \times \frac{4}{9} = 30\ m^2$$

(ii) چھوٹے کین کا حجم $= V_2 = 132\ m^3$

بڑے کین کا حجم $= V_1 = ?$

متشابہ اشکال کے حجم کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے: $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3$

$$\frac{V_1}{132} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 132 \times \frac{27}{8} = 445.5\ m^3$$

مشق نمبر 9.3

1۔ دو کرّوں کے رداسوں میں نسبت 3:4 ہے۔ اُن کے حجموں میں نسبت معلوم کریں۔

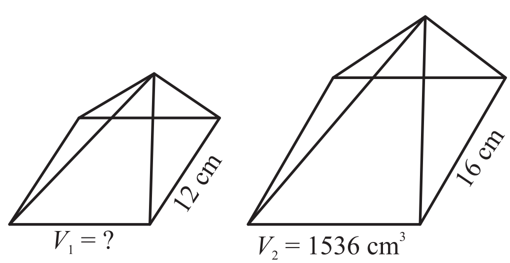
2۔ دو منظم چار اضلاع کے حجموں میں نسبت 8:27 ہے۔ اُن کے اضلاع کی لمبائیوں میں نسبت معلوم کریں۔

3۔ دو مخروطوں کے حجموں میں نسبت 64:125 ہے۔ نسبت کیا ہو گی

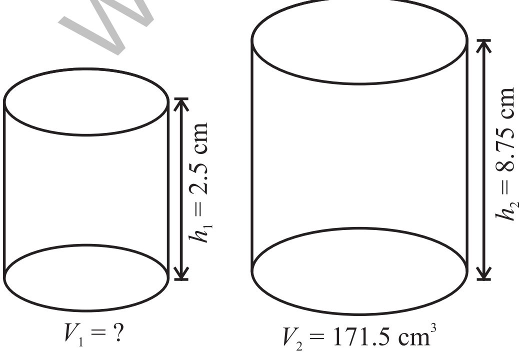
(i) اُن کی اونچائی میں (ii) قاعدے کے رقبوں میں۔

4۔ نیچے دیے گئے متشابہ اجسام میں نامعلوم مقداریں معلوم کریں۔

(i)

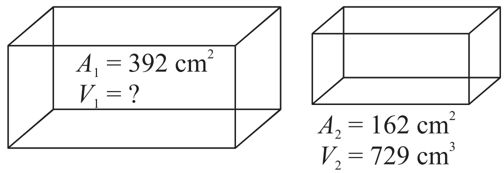


(ii)

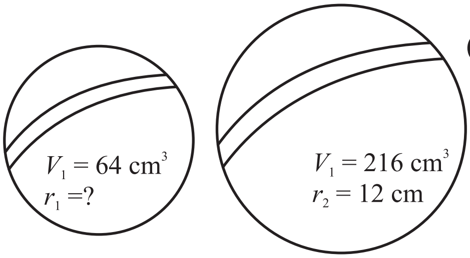


NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

(iii)



(iv)



5۔ دو متشابہ مخروطی کینز کی متناظرہ لمبائیوں میں نسبت 3:2 ہے۔

(i) بڑی مخروطی کون کی سطح کا رقبہ $96\ m^2$ ہو تو چھوٹی مخروطی کین کی سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

(ii) چھوٹی مخروطی کین کا حجم $240\ m^3$ ہو تو بڑی مخروطی کین کا حجم معلوم کریں۔

6۔ دو متشابہ سلنڈر نما پانی کے تالابوں کی اونچائیوں میں نسبت 5:3 ہے۔

(i) اگر بڑے تالاب کی سطح کا رقبہ 250m^2 ہو تو چھوٹے تالاب کی سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

(ii) اگر چھوٹے تالاب کا حجم $270m^3$ ہو تو بڑے تالاب کا حجم معلوم کریں۔

9.4 کثیر الاضلاع کی جیومیٹریکل خصوصیات اور اُن کا اطلاق
(Geometrical Properties of Polygons and their Application)

9.4.1 منظم کثیر الاضلاع کی جیومیٹریکل خصوصیات (Geometrical Properties of Regular Polygon)

ایک منظم کثیر الاضلاع کے تمام اضلاع اور زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔ کچھ عام منظم کثیر الاضلاع مساوی الاضلاع تکون، مربع، منظم مخمس، منظم مسدس وغیرہ ہیں۔

اندرونی زاویوں کا مجموعہ: n اضلاع والی کثیر الاضلاع کے اندرونی زاویوں کے مجموعہ کا کلیہ $(n-2)\times 180°$ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

اندرونی زاویہ: منظم n اضلاع والی کثیر الاضلاع کے لیے:

$$\text{ہر ایک اندرونی زاویہ کی پیمائش} = \frac{(n-2)\times 180°}{n}$$

مثال کے طور پر منظم مسدس کے لیے $n = 6$

$$\text{اس لیے ہر ایک اندرونی زاویہ کی مقدار} = \frac{(6-2)\times 180°}{6} = \frac{720°}{6} = 120°$$

بیرونی زاویہ: کسی بھی کثیر الاضلاع کے تمام بیرونی زاویوں کا مجموعہ اضلاع کی تعداد سے قطع نظر $360°$ ہوتا ہے۔ n اضلاع والی منظم کثیر الاضلاع کا بیرونی زاویہ درج ذیل کلیہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{بیرونی زاویہ کی مقدار} = \frac{360°}{n}$$

کسی راس پر اندرونی اور بیرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں یعنی،

$$\text{اندرونی زاویہ} + \text{بیرونی زاویہ} = 180°$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

وتر: n اضلاع والی منظم کثیر الاضلاع میں وتروں کی تعداد $\frac{n(n-3)}{2}$ ہے۔

تشاکل (Symmetry)

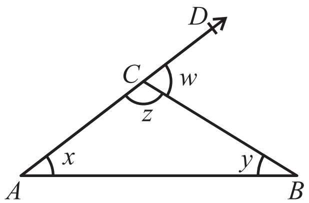
ایک n اضلاع والی منظم کثیر الاضلاع میں n درجے کے گردشی اور عکسی دونوں تشاکل ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر منظم مسدس میں چھے تشاکل کے خطوط ہوتے ہیں اور چھے درجے کی گردشی تشاکل ہوتی ہے۔ n اضلاع والی منظم کثیر الاضلاع کو اُسی حالت میں دیکھنے کے لیے $\frac{360°}{n}$ پر گھمایا جا سکتا ہے۔

9.4.2 مثلث کی جیومیٹریکل خصوصیات (Geometrical Properties of Triangle)

مثلث ایک تین اضلاع اور تین زاویوں والی کثیر الاضلاع ہے۔ مثلثوں کی اضلاع اور زاویوں کے لحاظ سے مختلف اقسام ہیں۔

زاویوں کا مجموعہ: کسی بھی مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ $180°$ ہوتا ہے۔ مساوی الاضلاع مثلث میں تمام اضلاع مقدار میں برابر اور ہر ایک زاویہ $60°$ ہوتا ہے۔ اس میں تشاکل کے تین خطوط ہوتے ہیں اور تین درجے کی گردشی تشاکل ہوتی ہے۔ مساوی الساقین مثلث میں دو اضلاع کی مقداریں برابر اور ان کے زاویے بھی برابر ہوتے ہیں۔ اِس میں تشاکل کا ایک خط ہوتا ہے۔

مثلث کا بیرونی زاویہ: کسی مثلث کا بیرونی زاویہ اُس کے مخالف اندرونی زاویوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



ΔABC میں $m\angle A + m\angle B = m\angle BCD$

یعنی $x + y = w$

9.4.3 متوازی الاضلاع کی جیومیٹریکل خصوصیات (Geometrical Properties of Parallelogram)

متوازی الاضلاع ایک ایسی چوکور ہے جس کے مخالف اضلاع متوازی اور لمبائی میں برابر ہوتے ہیں اور مخالف زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔ اس کے متصلہ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں وہ لمبائی میں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوتے۔

مثال 13: منظم مخمس کے ہر ایک اندرونی زاویہ کی مقدار معلوم کریں۔

حل:

$$\text{اندرونی زاویہ} = \frac{(n-2)\times 180°}{n}$$

$$= \frac{(5-2)\times 180°}{5} = \frac{540°}{5} = 108°$$

$$\text{ہر ایک بیرونی زاویہ} = \frac{360°}{5}$$

$$= 72°$$

> **دہرائی:**
> **مستطیل:** تمام زاویے $90°$ کے اور وتر برابر ہوتے ہیں۔
> **معین:** تمام اضلاع لمبائی میں برابر اور وتر ایک دوسرے کی $90°$ پر تنصیف کرتے ہیں۔
> **مربع:** تمام اضلاع لمبائی میں برابر، تمام زاویے $90°$ اور وتر لمبائی میں برابر اور ایک دوسرے کی $90°$ پر تنصیف کرتے ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

9.4.4 کثیر الاضلاع کا عملی زندگی میں اطلاق (Application of Polygons)

معمار عمارت کے ڈیزائن کے لیے کثیر الاضلاع استعمال کرتے ہیں۔ جب کہ انجینئرز پلوں کے ڈھانچہ کو مضبوط بنانے کے لیے اِن پر انحصار کرتے ہیں۔ آرٹ اور ڈیزائن میں کثیر الاضلاع خوب صورت نمونے اور تین رُخی نمونے بنانے میں مدد کرتے ہیں۔ کثیر الاضلاع، نقشوں پر شہروں اور زمینی حدود کو دکھاتے ہیں۔ سائنس میں، سالماتی اشکال، قدرتی نمونوں جیسے شہد کے چھتے اور یہاں تک کہ دوربین کے آئینے کے ڈیزائن میں بھی ظاہر ہوتے ہیں۔ ان کی سادہ اور ہمہ گیر اشکال بہت سے شعبوں میں ضروری ہوتی ہیں۔

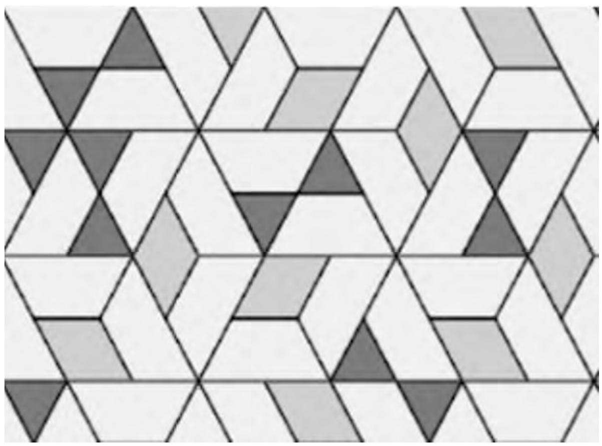
اقلیدسی اشکال کا سلسلہ / پچی کاری (Tessellation)

اقلیدسی اشکال کا سلسلہ / پچی کاری ایک ایسا نمونہ ہے جو کسی مستوی خلا یا متجاوز کیے بغیر پوری طرح یا مکمل طور پر ڈھانپ لیتا ہے ۔ متواتر نمونہ بنانے کے لیے ان اشکال کو لامحدود حد تک دہرایا جا سکتا ہے اقلیدی اشکال کا سلسلہ ایک ہی شکل یا اشکال کے امتزاج کا استعمال کرتے ہوئے بنائی جا سکتی ہے۔ یہ باقاعدہ یا بے قاعدہ ہو سکتے ہیں اور مختلف ہم آہنگی اور نمونوں کی نمائش کر سکتے ہیں۔ صرف تین منظم کثیر الاضلاع مستوی پر اپنے طور پر اقلیدی اشکال کا سلسلہ کر سکتے ہیں۔ متساوی الاضلاع مثلث، مربع اور باقاعدہ مسدس۔ یہ تشاکل رکھتی ہیں۔ مسدس (اندرونی زاویہ 120°) مکمل طور پر اقلیدی اشکال کا سلسلہ کر سکتی ہے۔ کیوں کہ تین مسدس ایک راس پر مل کر 360° کا زاویہ بناتی ہیں جس میں کوئی خلا نہیں ہوتی۔ جو کہ شہد کے چھتے کی طرح قدرتی دکھائی دیتی ہے۔

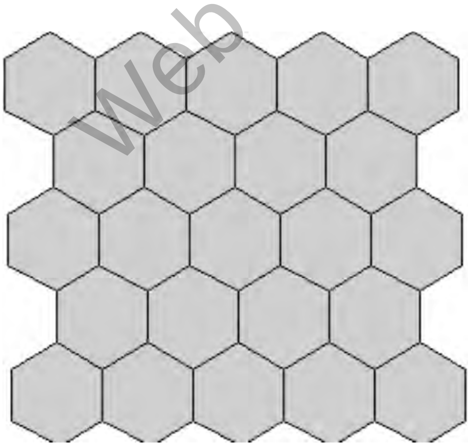
یاد رکھیے!
متساوی الاضلاع مثلث مکمل طور پر اقلیدسی اشکال کا سلسلہ کر سکتی ہے۔ کیوں کہ ہر متساوی الاضلاع مثلث کا اندرونی زاویہ 60° کا ہوتا ہے اور چھے مثلثان ایک نقطہ پر مل کر 360° کا زاویہ بناتی ہیں، انہیں بغیر کسی رکاوٹ کے خلا (space) بھرنے کی اجازت دیتا ہے۔ مربع مکمل طور پر اقلیدسی مثلثان سلسلہ کر سکتا ہے کیوں کہ ہر مربع کا اندرونی زاویہ 90° کا ہوتا ہے اور چار مربع ایک نقطہ پر مل کر 360° کا زاویہ بناتے ہیں۔

یاد رکھیے!
باقاعدہ مخمس اور دیگر کثیر الاضلاع جو کہ ایک راس پر مل کر 360° کا زاویہ نا بنائے، خلا سے پاک نمونہ نہیں بنا سکتے۔ یعنی اقلیدی اشکال کا سلسلہ ممکن نہیں۔

بے قاعدہ اقلیدسی اشکال



باقاعدہ اقلیدسی اشکال



Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال14: پانچ اضلاع والی اور دس اضلاع والی اشکال کے مجموعہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک اقلیدسی شکل بنائی گئی ہے۔ اس کے راس کے زاویوں کا مجموعہ معلوم کریں جہاں پر پانچ اضلاع والی اور دس اضلاع والی اشکال ملتی ہیں۔

حل: منظم دس اضلاع والی شکل کا اندرونی زاویہ $= \dfrac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$

$$= \frac{(10-2)\times 180^\circ}{10} = \frac{1440^\circ}{10} = 144^\circ$$

منظم مخمس کا اندرونی زاویہ $= 108^\circ$

زاویوں کا مجموعہ $= 144^\circ + 108^\circ = 252^\circ$

چوں کہ $360^\circ \neq$ زاویوں کا مجموعہ، اس لیے اقلیدسی شکل نہیں بن سکتی۔

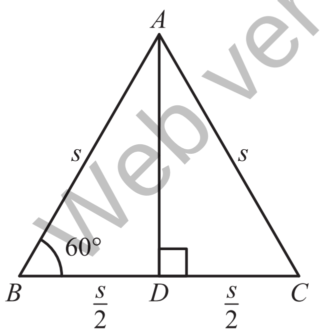
مثال15: ایک متوازی الاضلاع شکل کا کمرہ جس کے قاعدہ کی لمبائی 10m اور اونچائی 8m ہے۔ بابر قالین کا رول استعمال کرتے ہوئے کمرے کو کارپٹ کرنا چاہتا ہے۔ ایک رول 20m^2 جگہ گھیرتا ہے۔ اُس کمرہ کو کارپٹ کرنے کے لیے قالین کے کتنے رول درکار ہوں گے؟

حل: متوازی الاضلاع کا رقبہ $= A =$ ارتفاع $\times$ قاعدہ $= 10 \times 8 = 80\ \text{m}^2$

درکار قالین کے رول کی تعداد : $\dfrac{80}{40} = 4$ رول

مثال16: ایک s ضلع والی لمبائی مساوی الااضلاع مثلث ABC کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: نقطہ A سے ضلع BC کے نقطہ D پر ایک عمود کھینچیے۔ قائمۃ الزاویہ مثلث ABD میں



تکونیاتی نسبتیں استعمال کرتے ہوئے $\sin 60^\circ = \dfrac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m\overline{AD}}{s} \quad \Rightarrow \quad m\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

مثلث ABC کا رقبہ $= \dfrac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ ارتفاع $= \dfrac{1}{2} \times s \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}s$

مثلث ABC کا رقبہ $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$

مثال17: علی منظم مسدس (ہر ایک ضلع کی لمبائی 1m) اور مساوی الاضلاع مثلث (ہر ایک ضلع کی لمبائی 1m) استعمال کرتے ہوئے مستطیلی رقبہ $10\ \text{m} \times 5\ \text{m}$ پر فرشی ڈیزائن بنانا چاہتا ہے۔ اس رقبہ پر اقلیدسی نمونہ بنانے کے لیے علی کو کتنی مسدسوں اور مثلثوں کی ضرورت ہوگی؟

NOT FOR SALE-PESRP

حل: s ضلع لمبائی والی ایک مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہم کلیہ استعمال کر سکتے ہیں۔

$$s \text{ ضلع والی مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2$$

چوں کہ ایک مسدس میں چھے مثلثیں ہوتی ہیں۔ اس لیے 6 سے ضرب دیں گے۔

$$\text{مسدس کا رقبہ} = \frac{6\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot s^2$$

$$\text{منظم مسدس کا رقبہ} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times s^2 \approx \frac{3\sqrt{3}}{2} \times (1 \text{ m})^2 \approx 2.598 \text{ m}^2$$

$$\text{مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times s^2 \approx \frac{\sqrt{3}}{4} \times (1 \text{ m})^2 \approx 0.433 \text{ m}^2$$

$$\text{مستطیلی فرش کا رقبہ} = 10 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 50 \text{ m}^2$$

ترتیب معلوم کرنے کے لیے: فرض کریں نمونے میں ایک مسدس چھے مثلثوں سے گھری ہوئی ہو گی۔

$$\text{ایک مسدس اور چھے مثلثوں کا کل رقبہ} = 2.598 \text{ m}^2 + 6 \times 0.433 \text{m}^2$$

$$= 2.598 \text{ m}^2 + 2.598 \text{m}^2$$

$$= 5.196 \text{ m}^2$$

مسدسوں اور مثلثوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے:

$$\text{سیٹوں کی تعداد} = \frac{50 \text{ m}^2}{5.196 \text{ m}^2} \approx 9.62$$

تقریباً 10 سیٹ مستطیلی فرش کو مکمل کریں گے۔

پس ہمیں 10 مسدسوں اور 60 مثلثوں کی ضرورت ہے۔

مثال 18: فلک 100 m^2 کے مربعی شکل کے صحن میں ٹائل لگوانے کا منصوبہ بناتا ہے۔ وہ 0.25 m^2 کی مربعی شکل اور مثلثی شکل دو طرح کی ٹائل لگوانے کا فیصلہ کرتا ہے۔ اگر مربع شکل کی ٹائلیں 60 فی صد اور مثلثی شکل کی 40 فی صد ہوں تو ہر ایک شکل کی کتنی ٹائلوں کی ضرورت ہو گی؟

حل:

$$\text{ٹائلوں کی کل تعداد} = \frac{\text{صحن کا رقبہ}}{\text{ٹائل کا رقبہ}} = \frac{100}{0.25}$$

$$\text{ٹائلیں} = 400$$

$$\text{مربع شکل کی ٹائلوں کی تعداد} = 400 \times 0.6 = 240$$

$$\text{مثلثی شکل کی ٹائلوں کی تعداد} = 400 \times 0.4 = 160$$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مشق 9.4

1۔ (i) ڈیکا گان (10 اضلاع والی شکل) کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ کتنا ہوتا ہے؟

(ii) منظم مسدس کے ہر اندرونی زاویے کی مقدار معلوم کریں۔

(iii) منظم مخمس کے ہر بیرونی زاویے کی مقدار کتنی ہے؟

(iv) اگر کسی کثیر الاضلاع کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $1260°$ ہو تو اُس کثیر الاضلاع کے کتنے اضلاع ہیں؟

2۔ ایک متوازی الاضلاع $ABCD$ میں اگر $m\overline{AB} = 10\text{ cm}$، $m\overline{AD} = 6\text{ cm}$ اور $m\angle BAD = 45°$ ہو تو اُس کا رقبہ معلوم کریں۔

3۔ ایک متوازی الاضلاع $ABCD$ میں اگر $m\angle DAB = 70°$ ہو تو متوازی الاضلاع میں باقی زاویوں کی مقداریں معلوم کریں۔

4۔ ایک مربع شکل کو وتر کی طرف دو آدھے حصّوں میں کاٹ کر قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں سے ہر ایک کے وتر کی دوسری کے وتر سے جوڑ کر ایک نئی شکل بنائی گئی وضاحت کریں یہ شکل کیوں اقلیدسی نمونہ ہے اور اس نئی شکل کا اندرونی زاویہ معلوم کریں۔

5۔ بنیادی اشکال کو بار بار جوڑ کر ایک اقلیدسی نمونہ بنایا گیا ہے۔ بنیادی شکل ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس کے اضلاع کی مقدار 3، 4 اور 5 اکائیاں ہیں۔ ایک مربع شکل جس کا رقبہ 3600 مربع اکائیاں ہو اُس پر اقلیدسی نمونہ بنانے کے لیے قائمۃ الزاویہ مثلث کے کم سے کم کتنے عکس درکار ہوں گے؟

6۔ منظم مسدسوں کو استعمال کر کے ایک اقلیدسی نمونہ بنایا گیا ہے۔ ہر ایک مسدس کے ضلع کی لمبائی 5cm ہے۔ اگر اس اقلیدسی نمونہ 25 مسدسوں پر مشتمل ہو تو اس کا رقبہ معلوم کریں اور فرض کریں یہ اقلیدسی نمونہ مکمل مسدس ہے تو اس کے بیرونی کنارے کا احاطہ معلوم کریں۔

7۔ ایک مستطیلی فرش $12\text{ m}\times 15\text{ m}$ ہے۔ اس فرش کو مکمل کرنے کے لیے $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ کی کتنی ٹائلیں درکار ہوں گی؟

8۔ ایک مستطیلی دیوار کی لمبائی 10 m اور چوڑائی 120 m ہے۔ اس دیوار کو رنگ کرنے کے لیے رنگ کے کتنے گیلن کافی ہیں؟ اگر ایک گیلن 35 m^2 کے لیے کافی ہو۔

9۔ ایک مستطیلی دیوار کی اونچائی 10 m اور چوڑائی 4 m ہے۔ اگر 1 لٹر رنگ 7 m^2 کے لیے کافی ہو تو اس دیوار کے لیے کتنے لٹر رنگ درکار ہو گا؟

10۔ ایک ذوزنقہ شکل کی کھڑکی جس کے متوازی اضلاع کی لمبائیاں 3 m اور 1.5 m ہیں اور اونچائی 2 m ہے۔ کھڑکی کا رقبہ معلوم کریں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

جائزہ مشق 9

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) اگر دو کثیر الاضلاع متشابہ ہوں تو:

- (a) اُن کے متناظرہ زاویے برابر ہوتے ہیں۔
- (b) اُن کے رقبے برابر ہوتے ہیں۔
- (c) اُن کے حجم برابر ہوتے ہیں۔
- (d) اُن کے متناظرہ اضلاع برابر ہوتے ہیں۔

(ii) دو متشابہ کثیر الاضلاع کے رقبوں کی نسبت:

- (a) اُن کے احاطوں کی نسبت کے برابر ہوتی ہے۔
- (b) اُن کے متناظرہ اضلاع کی لمبائیوں کے مربع کی نسبت کے برابر ہوتی ہے۔
- (c) اُن کے متناظرہ اضلاع کی لمبائیوں کے مکعب کی نسبت کے برابر ہوتی ہے۔
- (d) اُن کے متناظرہ اضلاع کے مجموعے کے برابر ہوتی ہے۔

(iii) اگر دو متشابہ اجسام کے حجم $125\ cm^3$ اور $27\ cm^3$ ہوں تو ان کی متناظرہ بلندی کی نسبت ہے:

(a) 3:5 (b) 5:3 (c) 25:9 (d) 9:25

(iii) منتظم مخمس کا بیرونی زاویہ ہوتا ہے:

(a) 40° (b) 45° (c) 60° (d) 72°

(v) ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ $64\ cm^2$ ہے اور اُس کے متشابہ متوازی الاضلاع کا رقبہ $144\ cm^2$ ہے۔ اگر چھوٹی متوازی الاضلاع کے ضلع کی لمبائی 8 cm ہو تو بڑی متوازی الاضلاع کے متناظرہ ضلع کی لمبائی ہے:

(a) 10 cm (b) 12 cm (c) 18 cm (d) 16 cm

(vi) ایک نو اضلاع والی کثیر الاضلاع میں کل وتروں کی تعداد ہے:

(a) 18 (b) 21 (c) 25 (d) 27

(vii) دو متشابہ کرّوں کے رداس میں نسبت 4:5 ہے اگر بڑے کرّے کی سطح کا رقبہ $500\pi\ cm^2$ ہو تو چھوٹے کرّے کی سطح کا رقبہ ہے:

(a) $256\pi\ cm^2$ (b) $320\pi\ cm^2$ (c) $400\pi\ cm^2$ (d) $405\pi\ cm^2$

(viii) ایک منتظم کثیر الاضلاع کا بیرونی زاویہ 30° ہے کثیر الاضلاع میں وتروں کی تعداد ہے:

(a) 54 (b) 90 (c) 72 (d) 108

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ix)　ایک منظم مسدس میں وتر کی لمبائی اور ضلع کی لمبائی میں نسبت ہے:

(a) $\sqrt{3} : 1$　　(b) 2 : 1　　(c) 3 : 2　　(d) 2 : 3

(x)　ایک منظم کثیر الاضلاع کا اندرونی زاویہ 165° ہے اس کے اضلاع کی تعداد ہے:

(a) 15　　(d) 16　　(c) 20　　(d) 24

-2　اگر ایک کثیر الاضلاع کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 1080° ہو تو اس کثیر الاضلاع کے اضلاع کی تعداد معلوم کریں؟

-3　دو متشابہ بوتلیں اس طرح سے ہیں کہ ایک کی اونچائی دوسری کا دوگنا ہے۔ ان کی سطح کے رقبوں اور اُن کی گنجائش میں نسبت معلوم کریں۔

.4　ماڈل کار کی ہر ایک سمت کار کی متناظرہ سمتوں کا $\frac{1}{10}$ گنا ہے۔ درج ذیل کی نسبتیں معلوم کریں۔

(a) ان کے ونڈ سکرین کے رقبوں میں　　(b) اُن کے بوٹس کی گنجائش میں

(c) کار کی لمبائیوں میں　　(d) اُن کے پہیوں کی تعداد میں

-5　تین متشابہ جگوں کی اونچائی 8 cm، 12 cm اور 16 cm ہے اگر چھوٹے جگ کی گنجائش $\frac{1}{2}\ \ell$ ہو تو باقی دو کی گنجائش معلوم کریں۔

-6　تین متشابہ گلاسوں کی اونچائی 7.5 cm، 9 cm اور 10.5 cm ہے۔ اگر سب سے بڑے گلاس کی گنجائش 343mℓ ہو تو باقی دو کی گنجائش معلوم کریں۔

-7　ایک کھلونا ساز ماڈل کاریں بناتا ہے۔ جو اصل کاروں سے ہر لحاظ سے متشابہ ہیں اگر ماڈل کار کے دروازے کے رقبے اور اصل کار کے دروازے کے رقبے میں نسبت 1 cm:2500cm ہو تو درج ذیل معلوم کریں۔

(a) اُن کی لمبائیوں میں نسبت　　(b) اُن کے پٹرول ٹینکوں کی گنجائش میں نسبت

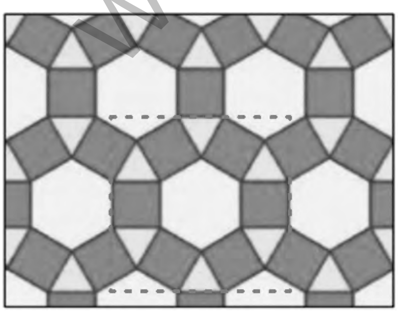
(c) اگر اصل کار 150 cm چوڑائی ہو تو ماڈل کار کی چوڑائی۔

(d) اگر ماڈل کار کے پچھلے شیشے کا رقبہ $3\ cm^2$ ہو تو اصل کار کے پچھلے شیشے کا رقبہ۔

-8　دو متشابہ کافی جار پر لگے لیبلوں کے رقبوں میں نسبت 144:169 ہے۔ درج ذیل نسبتیں معلوم کریں۔

(a) دو جاروں کی اونچائی میں　　(b) اُن کی گنجائش میں

-9　ایک فرش پر ٹائلوں کا اقلیدسی نمونہ مسلسل منظم مسدس چھے مربع اور چھے مساوی الاضلاع مثلثوں کے نمونوں کے استعمال سے بنایا گیا ہے۔ اگر یہ کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کی لمبائی $\frac{1}{2}$ m ہو تو ایک نمونے کا رقبہ معلوم کریں۔



NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

یونٹ
10

تفاعل کے گراف
(Graph of Functions)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- یک درجی تفاعل کے گراف بنا سکیں۔(مثال کے طور پر $y = ax + b$)
- دو درجی، سہ درجی، معکوس اور قوت نمائی تفاعل کے گراف بنا سکیں اور تشریح کر سکیں۔
  - $y = ax^n$ کا گراف بنا سکیں، جہاں $x > 0$ کے لیے n مثبت صحیح عدد، منفی صحیح عدد، ناطق عدد ہو اور a کوئی بھی حقیقی عدد ہو۔
  - $y = ka^x$ کا گراف بنا سکیں، جہاں x حقیقی عدد ہو اور $a > 1$
- گراف کے ذریعے کسی عملی رجان کی قوت نمائی بڑھوتری / انحطاط کو دریافت کر سکیں۔
- مماس بنا کر منحنی خطوط کی ڈھلوانوں کا تعین کر سکیں۔
- گراف کی بناوٹ اور تشریح کے تصورات کو حقیقی زندگی کے مسائل پر لاگو کر سکیں (جیسے ٹیکس کی ادائیگی، آمدنی، تنخواہ، لاگت کے مسائل اور منافع کا تجزیہ)

تعارف (Introduction)

گراف متغیرات کے درمیان تعلقات کو دیکھنے اور ان کا تجزیہ کرنے کے لیے طاقتور آلات ہیں، جو انہیں مختلف ریاضیاتی افعال اور ان کے اطلاق کو سمجھنے کے لیے ضروری ہیں۔ اس یونٹ میں ہم یک درجی، دو درجی، سہ درجی، معکوس اور قوت نمائی تفاعل کے گراف پر تحقیق کریں گے۔ ہم یہ بھی جائزہ لیں گے کہ مماس بنا کر منحنی خطوط کی ڈھلوانوں کا تعین کیسے کیا جائے۔ آخر میں ہم ان تصورات کو حقیقی زندگی کے منظر ناموں سے جوڑیں گے اور یہ سیکھیں گے کہ عملی مسائل کو حل کرنے کے لیے گراف کو کیسے بنانا اور تشریح کرنا ہے۔

10.1 تفاعل اور ان کے گراف (Functions and their Graphs)

تفاعل ریاضیاتی تصورات کا استعمال کرتے ہوئے حقیقی دنیا کے رجحان کی نمائندگی کرنے کے لیے ضروری آلات ہیں۔ ایک تفاعل کو مختلف اشکال، بشمول ایک مساوات، ایک گراف، ایک اعدادی جدول یا زبانی وضاحت میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، ایک دائرے کا رقبہ اس کے رداس پر منحصر ہوتا ہے۔

ایسی صورتوں میں ایک متغیر y دوسرے متغیر x پر منحصر ہوتا ہے۔ اس تعلق کا اظہار اس طرح کیا جاتا ہے:

$$y = f(x)$$

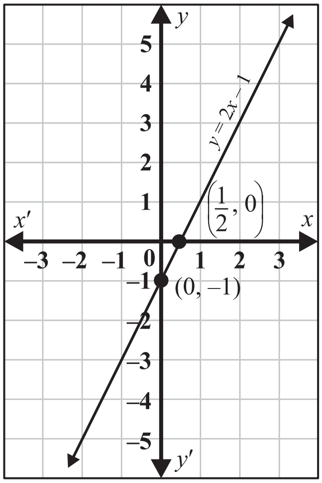
یہاں f تفاعل کو ظاہر کرتا ہے x آزاد متغیر (اِن پُٹ) ہے اور y منحصر متغیر (آؤٹ پُٹ) ہے جو x کی قیمت سے متعین ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

10.1.1 یک درجی تفاعل کا گراف (Graph of Linear Functions)

یک درجی تفاعل ایک ریاضیاتی اظہار ہے جو دو متغیرات کے درمیان خط مستقیم کے تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔ اس کی عمومی شکل $f(x) = mx + c$ ہوتی ہے جہاں "m" خط کی ڈھلوان ہے یہ بتاتا ہے کہ کتنی عمودی ڈھلوان ہے اور "c" y- قاطع ہے (وہ نقطہ جہاں خط y- محور کو کاٹتا ہے۔) اسے $y = mx + c$ کے طور پر بھی لکھا جا سکتا ہے۔



مثال 1: $y = 2x - 1$ کا گراف بنائیں۔

حل: یک درجی تفاعل کا گراف بنانے کے لیے ہم اس کے x- قاطع اور y- قاطع معلوم کرتے ہیں۔

$x = 0$ درج کرنے سے $y = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $(0, -1)$ y- قاطع ہے۔

$y = 0$ درج کرنے سے $x = \frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ x- قاطع ہے۔

یہ گراف ایک خط مستقیم ہے جو دائیں طرف بڑھتا ہے کیونکہ ڈھلوان مثبت ہے۔

10.1.2 دو درجی تفاعل کا گراف (Graph of Quadratic Functions)

ایک دو درجی تفاعل ایک کثیر رقمی قسم کا تفاعل ہوتا ہے جس میں x^2 والی رقم شامل ہوتی ہے۔

اس کی عمومی شکل یہ ہوتی ہے:

$$y = ax^2 + bx + c$$

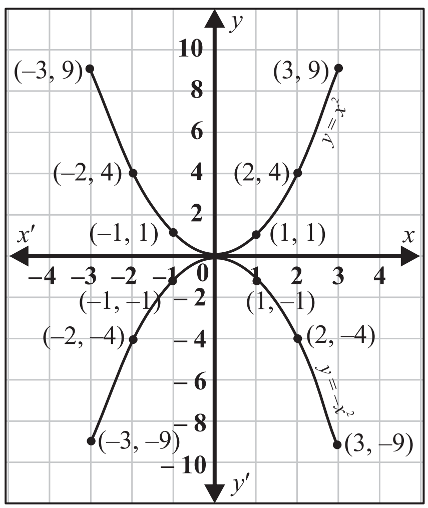
جہاں a، b اور c مستقل مقداریں ہیں اور $a \neq 0$

> **یاد رکھیے!**
>
> دو درجی تفاعل کا گراف ہمیشہ ایک پیرابولا ہوتا ہے:
> - اگر $a > 0$ ہو تو پیرابولا "◡" کی طرح اوپر کی طرف کھلتا ہے۔
> - اگر $a < 0$ ہو تو پیرابولا "◠" کی طرح نیچے کی طرف کھلتا ہے۔

مثال 2: ایک ہی شکل میں $y = x^2$ اور $y = -x^2$ کے گراف بنائیں۔

حل: درج ذیل جدول x کی مختلف قیمتوں کو ظاہر کرتا ہے اور دیے گئے تفاعل کو ان قیمتوں پر جانچا جاتا ہے۔

x	$y = x^2$	$y = -x^2$
–3	$(-3)^2 = 9$	–9
–2	$(-2)^2 = 4$	–4
–1	$(-1)^2 = 1$	–1
0	$(0)^2 = 0$	0
1	$(1)^2 = 1$	–1
2	$(2)^2 = 4$	–4
3	$(3)^2 = 9$	–9



Web version of PCTB textbook

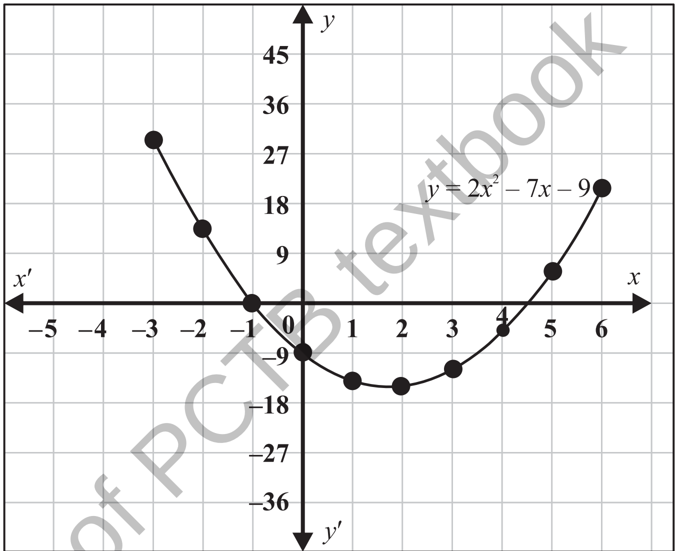
(i)　$y = x^2$ کا گراف پیرابولا (parabola) کو ظاہر کرتا ہے جو کہ مبدا سے گزرتا ہے اور اوپر کی طرف کھلتا ہے۔

(ii)　$y = -x^2$ کا گراف بھی پیرابولا (parabola) کو ظاہر کرتا ہے جو کہ مبدا سے گزرتا ہے اور نیچے کی طرف کھلتا ہے۔

مثال 3: $-3 \le x \le 6$ کے لیے $y = 2x^2 - 7x - 9$ کا گراف بنائیں۔

حل: x اور y کی قیمتیں جدول میں دی گئی ہیں اور نیچے اس کا گراف بنایا گیا ہے:

x	y
–3	30
–2	13
–1	0
0	–9
1	–14
2	–15
3	–12
4	–5
5	6
6	21



$y = 2x^2 - 7x - 9$ کا گراف پیرابولا (parabola) کو ظاہر کرتا ہے اور اوپر کی طرف کھلتا ہے۔ یہ y - قاطع کو $(0, -9)$ اور x - قاطع کو $(-1, 0)$ اور $(4.5, 0)$ پر قطع ہے۔

10.1.3　سہ درجی تفاعل کا گراف (Graph of Cubic Functions)

سہ درجی تفاعل درجہ 3 کی کثیر رقمی کی ایک قسم ہے اس کی عمومی شکل یہ ہوتی ہے:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

جہاں a، b، c اور d مستقل مقداریں ہیں اور $a \neq 0$

یاد رکھیے!

- سہ رقمی تفاعل کا گراف ایک منحنی خط ہوتا ہے جس میں زیادہ سے زیادہ دو موڑ ہوتے ہیں۔
- اس کی شکل عام "S" جیسی ہوتی ہے اور عددی سروں پر منحصر ہوتی ہے۔ اس کی شکل مختلف ہو سکتی ہے۔
- اس طرح کے تفاعل بہت زیادہ پیچیدہ ہوتے ہیں اور یک درجی اور دو درجی تفاعل سے زیادہ مختلف النوع رویے کو ظاہر کرتے ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP

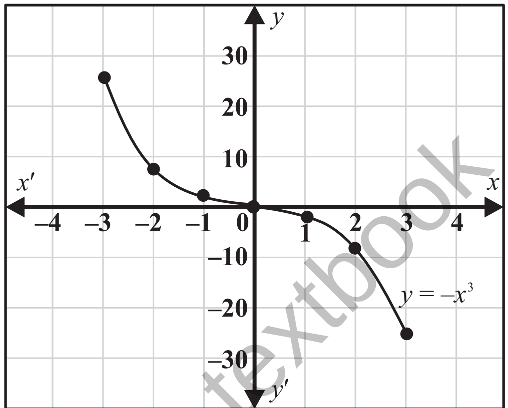
Web version of PCTB textbook

مثال4: $-3 \le x \le 3$ کے لیے درج ذیل سہ رقمی تفاعل کا گراف بنائیں۔

$y = -x^3$

حل: x اور y کی قیمتیں جدول میں دی گئی ہیں اور نیچے اس کا گراف بنایا گیا ہے۔

x	$y = -x^3$
–3	27
–2	8
–1	1
0	0
1	–1
2	–8
3	–27

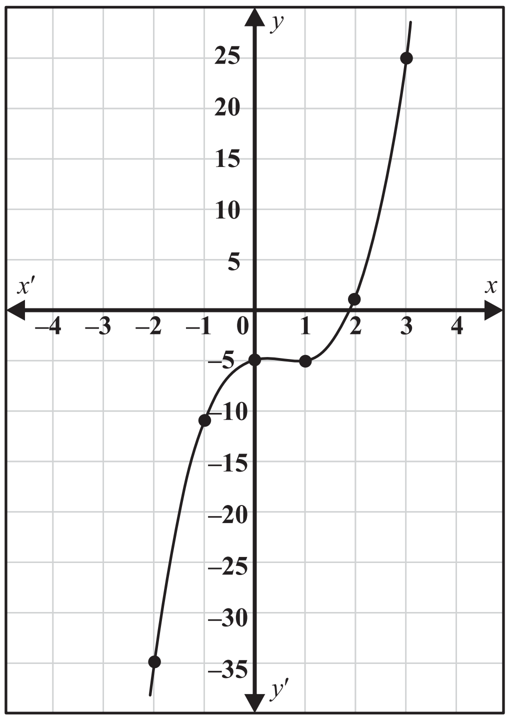


منحنی خط مبدا سے گزرتا ہے۔

مثال5: $-2 \le x \le 3$ کے لیے $y = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ کا گراف بنائیں۔

حل: x اور y کی قیمتیں جدول میں دی گئی ہیں اور اس کا گراف بنایا گیا ہے:

x	y
–2	–35
–1	–11
0	–5
1	–5
2	1
3	25



گراف ہمیں بتاتا ہے کہ جب $x = 0$ ہو تو تفاعل کی قیمت -5 ہوتی ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

10.1.4 معکوس تفاعل کا گراف (Graph of Reciprocal Functions)

معکوس تفاعل درج ذیل شکل کا تفاعل ہوتا ہے:

$$y = \frac{a}{x}$$

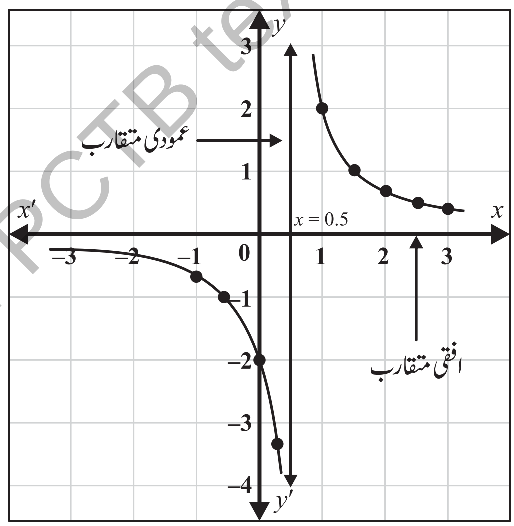
جہاں a کوئی حقیقی عدد ہے اور $x \neq 0$

مثال 6: درج ذیل معکوس تفاعل کا گراف بنائیں:

$$y = \frac{1}{x - 0.5}, x \neq 0.5$$

حل: x اور y کی قیمتیں جدول میں دی گئی ہیں اور اس کا گراف بنایا گیا ہے:

x	y
–1	–0.67
–0.5	–1
–0.2	–1.43
0	–2
0.2	–3.3
0.5	غیر واضح
1	2
1.2	1.43
1.5	1
2	0.67
2.2	0.59
2.5	0.5
3	0.4



یاد رکھیے!
متقارب (asymptote) ایک ایسا خط ہے جو گراف تک پہنچتا ہے لیکن کبھی نہیں چھوتا۔

10.1.5 قوت نمائی تفاعل کا گراف ($y = ka^x$ جہاں x حقیقی عدد ہے اور $a > 1$)

(Graph of Exponential Functions ($y = ka^x$ where x is real number, $a > 1$))

ایک قوت نمائی تفاعل اس شکل کا ایک ریاضیاتی تفاعل ہوتا ہے

$$y = ka^x$$

جہاں a, k مستقل مقداریں ہیں، x متغیر ہے اور $a > 1$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

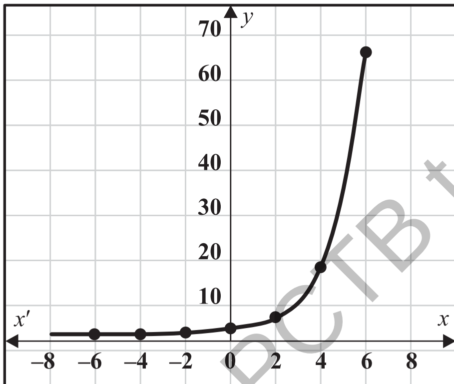
مثال 7: $-6 \leq x \leq 6$ کے لیے قوت نمائی تفاعل $y = 2^x$ کا گراف بنائیں۔

حل: تفاعل $y = 2^x$ میں اساس 2 اور متغیر x قوت ہے۔ (x, y) کی قیمتیں درج ذیل جدول میں دی گئی ہیں:

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$y = 2^x$	0.02	0.06	0.25	1	4	16	64

درج بالا نقاط کا گراف بنایا گیا ہے:

$y = 2^x$ کا گراف



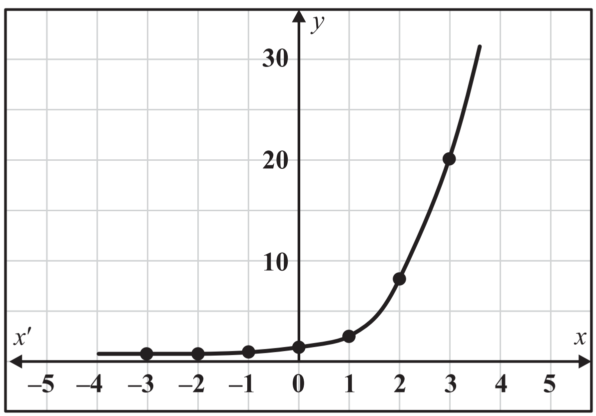
$y = 2^x$ کا گراف منحنی خط کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 8: قوت نمائی تفاعل $y = e^x$ کا گراف بنائیں۔

حل: تفاعل $y = e^x$ میں اساس e اور متغیر x قوت ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $e = 2.7182818$، جو کہ دو اعشاریہ تک $e = 2.72$ ہے۔ x اور y کی قیمتوں کا جدول ذیل میں دیا گیا ہے:

x	$y = e^x$
-3	0.05
-2	0.14
-1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.40
3	20.09

$y = e^x$ کا گراف



Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

10.1.6 $y = ax^n$ کا گراف (جہاں $x > 0$ کے لیے n مثبت صحیح عدد، منفی صحیح عدد یا ناطق عدد ہے اور a کوئی بھی حقیقی عدد ہے)
Graphs of $y = ax^n$ (where n is +ve integer, -ve integer or rational number for $x > 0$ and a is any real number)

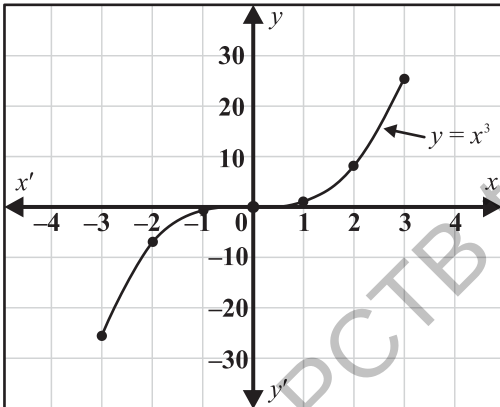
تفاعل $y = ax^n$ کا گراف، جہاں n ایک مثبت عدد، منفی عدد یا $x > 0$ کے لیے ناطق عدد ہے اور a کوئی بھی حقیقی عدد ہے، n کی قیمت کے لحاظ سے مختلف رویوں کو ظاہر کرتا ہے۔ ان صورتوں کی مثالیں درج ذیل ہیں:

(i) جب n مثبت صحیح عدد ہو۔ $(n = 3)$

مثال 9: $-3 \le x \le 3$ کے لیے $y = x^3$ کا گراف بنائیں۔

حل: جدول x اور y کی مختلف قیمتوں کو ظاہر کرتا ہے۔
پس منحنی خط مبدا میں سے گزرتا ہے۔

x	$y = x^3$
−3	−27
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8
3	27

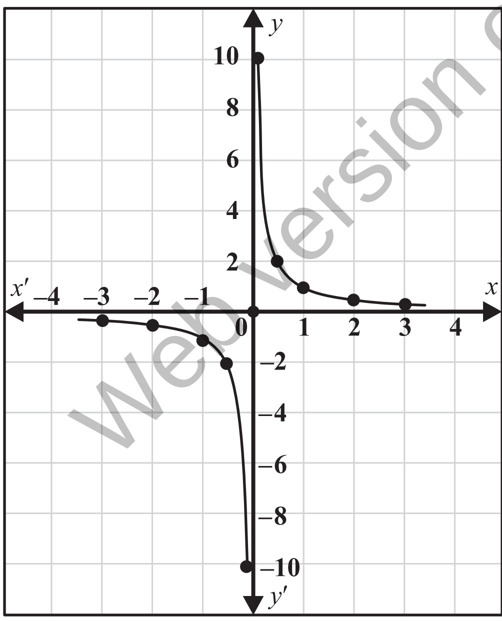


(ii) جب n منفی صحیح عدد ہو۔ $(n = -1)$

مثال 10: $y = x^{-1}$ کا گراف بنائیں۔

حل: $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$

دیا ہوا جدول x اور y کی مختلف قیمتوں کو ظاہر کرتا ہے۔



x	$y = \frac{1}{x}$
−3	−0.3
−2	−0.5
−1	−1
−0.5	−2
−0.1	−10
0.1	10
0.5	2
1	1
2	0.5
3	0.3

درج بالا گراف دو شاخوں پر مشتمل ہے، ایک پہلے ربع میں اور دوسری تیسری ربع میں ہے۔ دونوں شاخیں x- محور اور y- محور کو کبھی نہیں چھوتیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

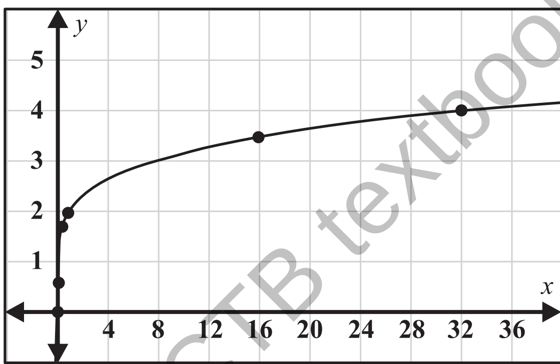
(iii) جب n ناطق عدد ہو۔ $\left(n = \dfrac{1}{5}\right)$

مثال 11: $y = 2x^{\frac{1}{5}}$ کا گراف بنائیں۔

حل: $y = 2x^{\frac{1}{5}}$

جدول x اور y کی مختلف قیمتوں کو ظاہر کرتا ہے:

x	y
0	0
0.01	0.80
0.5	1.74
1	2
16	3.48
32	4



مشق 10.1

1۔ درج ذیل یک درجی تفاعل کے گراف بنائیں:

(i) $y = 3x - 5$ (ii) $y = -2x + 8$

(iii) $y = 0.5x - 1$

2۔ درج ذیل دو درجی اور سہ درجی تفاعل کے گراف بنائیں:

(i) $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6;\ -3.5 \le 2.5 \le x$ (ii) $y = x^2 + x - 2$

(iii) $y = x^3 + 3x^2 + 2x;\ -2.5 \le x \le 0.5$ (iv) $y = 5x^2 - 2x - 3$

3۔ درج ذیل تفاعل کے گراف بنائیں:

(i) $y = 4^x$ (ii) $y = 5^{-x}$ (iii) $y = \dfrac{1}{x-3},\ x \ne 3$

(iv) $y = \dfrac{2}{x} + 3,\ x \ne 0$ (v) $y = x^{\frac{1}{2}}$ (vi) $y = 3x^{\frac{1}{3}}$

(vii) $y = 2x^{-2}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

10.2 گراف کے ذریعے کسی عملی رجحان کی قوت نمائی بڑھوتری / انحطاط کو دریافت کرنا
(Exponential Growth/ Decay of a Practical Phenomenon through its Graph)

حقیقی دنیا کے رجحان میں قوت نمائی بڑھوتری اور زوال کا بڑے پیمانے پر مشاہدہ کیا جاتا ہے اور ان کی تصویری نمائندگی ان طریقوں میں اہم بصیرت پیش کرتی ہے۔ قوت نمائی بڑھوتری میں جیسے کہ آبادی میں اضافہ، مالیات میں مرکب منافع یا متعدی بیماریوں کے پھیلاؤ میں گراف آہستہ آہستہ شروع ہوتا ہے لیکن وقت کے ساتھ ساتھ تیزی سے بڑھتا ہے۔ منحنی خط تیزی سے بڑھتا ہے یہ ظاہر کرتا ہے کہ مسلسل متناسب تبدیلیوں کی وجہ سے وقت کے ساتھ کس طرح بڑھوتری زیادہ واضح ہوتی ہے۔ اس کے برعکس قوت نمائی انحطاط میں اشیا کے ٹھنڈا ہونے یا اثاثوں کی قیمت میں کمی کے دوران گراف بلند ہونا شروع ہوتا ہے اور برابر ہونے سے پہلے تیزی سے کم ہو جاتا ہے جو وقت کے ساتھ ساتھ بتدریج کمی کی نشان دہی کرتا ہے۔ یہ گراف مختلف النوع شعبوں میں رجحانات کو واضح کرنے، پیشین گوئیاں کرنے اور فیصلہ سازی سے آگاہ کرنے کے لیے ضروری ہیں۔

مثال 12: 2010 میں ایک گاؤں کی آبادی 753 تھی۔ اگر مساوات $p = 753e^{0.03t}$ کے مطابق آبادی بڑھتی ہے، جہاں p آبادی میں t وقت میں افراد کی تعداد ہے۔

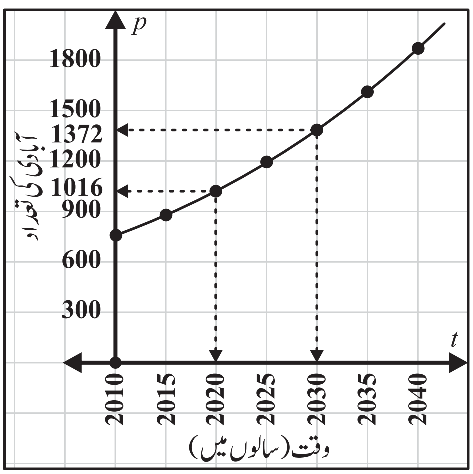
(a) $t = 0$ (2010 میں) سے $t = 30$ (2040 میں) کے لیے آبادی کی مساوات کا گراف بنائیں۔

(b) گراف سے آبادی کا تخمینہ لگائیں (i) 2020 میں (ii) 2030 میں۔

حل: (a) قوت نمائی تفاعل کی عمومی شکل معلوم ہے۔ چوں کہ گراف کو تخمینوں کے لیے استعمال کیا جا رہا ہے، اس لیے مطلوبہ وقفہ $t = 0$ سے $t = 30$ پر ایک درست گراف کی ضرورت ہے۔

مختلف اوقات کے لیے قیمتوں کا جدول معلوم کرتے ہیں:

t	p
0	753
5	874.9
10	1016.4
15	1180.9
20	1372.1
25	1594.1
30	1852.1



Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(b) گراف سے (i) 2020 $(t = 10)$ میں آبادی 1016 افراد ہے۔

(ii) 2030 $(t = 20)$ میں آبادی 1372 افراد ہے۔

10.2.1 مماس بنا کر منحنی خطوط کے ڈھلوانوں کا تعین کرنا
(Gradients of Curves by Drawing Tangents)

کسی بھی نقطہ پر گراف کی ڈھلوان اس نقطہ پر منحنی خط کے مماس کی ڈھلوان کے برابر ہوتی ہے۔ یاد رکھیں کہ مماس ایک ایسا خط ہے جو منحنی خط کو صرف ایک نقطہ پر چھوتا ہے (اور اسے کاٹتا نہیں)۔

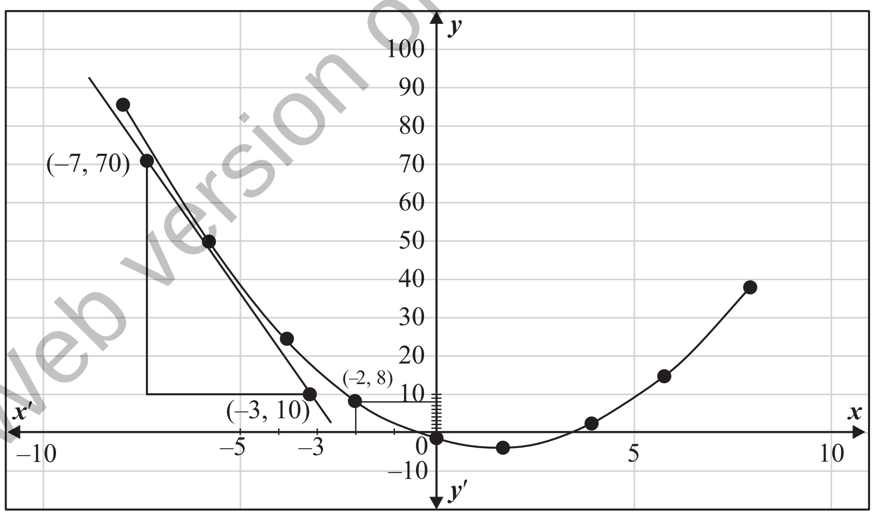
دو نقاط کے درمیان ڈھلوان کی وضاحت اس طرح کی جاتی ہے:

$$\text{ڈھلوان} = \frac{y \text{ میں تبدیلی}}{x \text{ میں تبدیلی}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 13: $y = x^2 - 3x - 2$ کے گراف کو -8 سے 8 تک x کی قیمتوں کے لیے بنائیں $x = -6$ پر مماس کھینچیں اور ڈھلوان کا تعین کریں۔

حل: x کی دی گئی قیمتوں کے لیے y کی قیمتیں معلوم کی گئی ہیں۔ نتائج جدول میں دیے گئے ہیں اور ان کی مدد سے گراف بنایا گیا ہے:

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y	86	52	26	8	-2	-4	2	16	38



مماس پر دو نقاط $(-3, 10)$ اور $(-7, 70)$ لیتے ہیں۔

$$\text{ڈھلوان} = \frac{70 - 10}{-7 + 3} = -15$$

چوں کہ ڈھلوان منفی ہے، اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ x کی قدر بڑھنے کے ساتھ ہی گراف کی اونچائی کم ہوتی جاتی ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

10.2.2 حقیقی زندگی میں گراف کا اطلاق (Applications of Graph in Real-Life)

خاکہ نگاری اور گراف کی تشریح کے تصورات کو حقیقی زندگی کے مسائل پر لاگو کرنا ہمیں پیچیدہ تعلقات کو دیکھنے اور ان کا تجزیہ کرنے، باخبر فیصلے کرنے اور حل کو بہتر بنانے کے قابل بناتا ہے۔ ٹیکس کی ادائیگی کے منظر ناموں میں گراف کے تصورات زیادہ سے زیادہ آمدنی کی سطح، ٹیکس اور ذمہ داری کی شناخت میں مدد کرتے ہیں۔ آمدنی اور تنخواہ کے مسائل میں، گراف معاوضے کے پیکجوں اور آمدنی میں اضافے کے تجزیہ میں سہولت فراہم کرتے ہیں۔ تجربے کے خلاف تنخواہ کا خاکہ بنانے سے معاوضے کے ڈھانچے میں نمونہ یا بے ضابطگی واضح ہو جاتی ہے۔ لاگت اور منافع کے تجزیے میں گراف کاروبار کی لاگت اور منافع کے تعلقات کو دیکھنے، مساوی نقاط کا تعین کرنے اور پیداوار کی سطح کو بہتر بنانے کے قابل بناتے ہیں۔

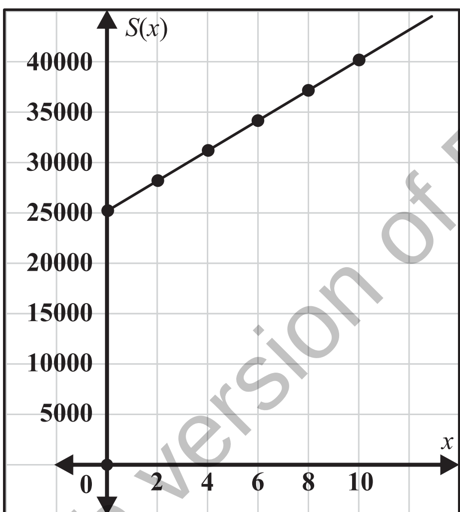
مثال 14: ماجد کی تنخواہ $S(x)$ روپوں میں درج ذیل کلیے پر مبنی ہے:

$$S(x) = 25000 + 1500x$$

جہاں x ان سالوں کی تعداد ہے جو اس نے کام کیا۔ $0 \le x \le 10$ کے لیے تنخواہ کے تفاعل کا گراف بنائیں اور اس کی تشریح کریں۔

حل: جدول کی قدریں اور گراف نیچے دیے گئے ہیں:

x	$S(x)$
0	25000
2	28000
4	31000
6	34000
8	37000
10	40000



ماجد کی تنخواہ ملازمت کے سالوں کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتی ہے اور ہر سال 1500 روپے بڑھتی ہے۔

مثال 15: ایک کمپنی فٹ بال تیار کرتی ہے۔ x فٹ بال کی تیاری کی لاگت $C(x) = 90,000 + 600x$ ہے۔ x فٹ بالوں کی فروخت سے حاصل ہونے والی آمدنی $R(x) = 1800x$ ہے۔ مساوی نقطہ (break-even-point) معلوم کریں اور 200 فٹ بال فروخت ہونے پر منافع یا نقصان کا تعین کریں۔ دونوں تفاعل کے گراف کھینچیں اور مساوی نقطہ کی نشان دہی کریں۔

حل: دیا گیا ہے:

لاگت کا تفاعل $= C(x) = 90,000 + 600x$

آمدن کا تفاعل $= R(x) = 1,800x$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مساوی نقطہ اس وقت ہوتا ہے جب $R(x) = C(x)$

$$1800x = 90000 + 600x$$
$$1200x = 90000$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{90000}{1200}$$
$$x = 75$$

لہٰذا مساوی نقطہ پر 75 فٹ بال تیار یا فروخت کیے جاتے ہیں۔

اب ہم 150 فٹ بال کا منافع معلوم کرتے ہیں۔

جب $x = 150$

آمدنی $R(150) = 1,800(150)$

$= 270,000$ روپے

اور $C(150) = 90,000 + 600(150)$

$= 180,000$ روپے

اب منافع : $P(x) = R(x) - C(x)$

درج کرنے سے $x = 150$

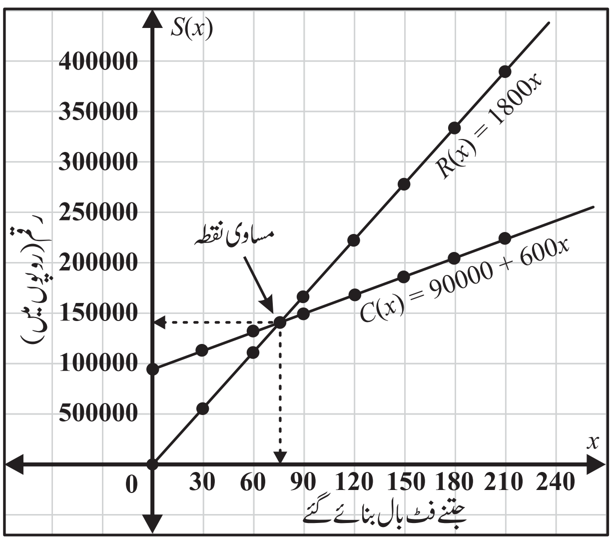
$$P(150) = R(150) - C(150)$$
$$= 270,000 - 180,000$$

$= 90,000$ روپے

اس طرح کمپنی 150 فٹ بال فروخت کرنے پر 90,000 روپے کا منافع کماتی ہے۔

جدول کی قدریں اور گراف نیچے دیے گئے ہیں:

x	$C(x)$	$R(x)$
0	90000	0
30	108000	54000
60	126000	108000
90	144000	162000
120	162000	216000
150	180000	27000
180	198000	324000
210	216000	378000



NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

مشق 10.2

1۔ $y = 2x^2 - 4x + 3$ کے گراف کو x کی قدروں -1 سے 3 تک بنائیں۔ (3 ,2) پر مماس بنائیں اور ڈھلوان معلوم کریں۔

2۔ $y = 3x^2 + x + 1$ کا گراف بنائیں اور (5 ,1) پر مماس کھینچیں۔ اس نقطہ پر مماس کی ڈھلوان بھی معلوم کریں۔

3۔ 2016 میں ایک اسکول میں طلبہ کی تعداد 1000 تھی۔ اگر مساوات $S = 1000\ e^{-t}$ کے مطابق تعداد زوال پذیر ہوتی ہے، جہاں t وقت پر طلبہ کی تعداد S ہوتی ہے۔

(a) (2016 میں) $t = 0$ سے (2025 میں) $t = 9$ کے لیے دی گئی مساوات کا گراف بنائیں۔

(b) گراف سے، 2019 اور 2023 میں طلبہ کی تعداد معلوم کریں۔

4۔ کسی شے کی طلب اور رسد کے تفاعل مساواتوں کے ذریعے دیے گئے ہیں۔

$$P_d = 400 - 5Q,\ P_s = 3Q + 24$$

وقفہ $Q = 0$ سے $Q = 300$ پر ہر تفاعل کا گراف بنائیں۔

5۔ شاہد کی تنخواہ $S(x)$ روپوں میں درج ذیل کلیے پر مبنی ہے:

$$S(x) = 45000 + 4500x$$

جہاں x ان سالوں کی تعداد ہے جو اس نے کمپنی میں کام کیا۔ $0 \le x \le 5$ کے لیے تنخواہ کے تفاعل کا گراف بنائیں اور اس کی تشریح کریں۔

6۔ ایک کمپنی اسکول بیگ تیار کرتی ہے۔ x بیگ تیار کرنے کی لاگت $C(x) = 1200 + 20x$ ہے اور x بیگ کی فروخت سے حاصل ہونے والی آمدنی $R(x) = 50x$ ہے۔

(a) مساوی نقطہ معلوم کریں۔

(b) 250 بیگ فروخت ہونے پر نفع یا نقصان کا تعین کریں۔

(c) دونوں تفاعل کے گراف بنائیں اور مساوی نقطہ کی نشان دہی کریں۔

7۔ ایک اخباری ایجنسی نے 70 روپے فی ایڈیشن اور معمولی پرنٹنگ اور تقسیم کے اخراجات 40 روپے فی کاپی کی قیمت مقرر کی ہے۔ منافع کا تفاعل $p(x) = 10\ x - 70$ ہے، جہاں x اخبارات کی تعداد ہے۔ گراف بنائیں اور 500 اخبارات کے لیے منافع معلوم کریں۔

8۔ علی اسکول کو فروخت کے لیے مہنگی قمیضیں تیار کرتا ہے۔ x قمیضوں کی قیمت (روپوں میں) $C(x) = 1500 + 10x + 0.2x^2,\ 0 \le x \le 150$ ہے۔ گراف بنائیں اور 200 قمیضوں کی قیمت معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جائزہ مشق 10

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) $x = 5$ ظاہر کرتا ہے:

(a) x- محور　(b) y- محور

(c) x- محور کے متوازی خط　(d) y- محور کے متوازی خط

(ii) خط $y = 5x + 3$ کی ڈھلوان ہے:

(a) 3　(b) –3　(c) 5　(d) –5

(iii) $y = -2x - 1$ کا y قاطع ہے:

(a) –2　(b) 2　(c) –1　(d) 1

(iv) $y = x^3$ کا گراف x- محور کو __________ پر کاٹتا ہے۔

(a) $x = 0$　(b) $x = 1$　(c) $x = -1$　(d) $x = 2$

(v) 3^x کا گراف ظاہر کرتا ہے:

(a) افزائش　(b) انحطاط　(c) a اور b دونوں　(d) خط کو

(vi) $y = -x^2 + 5$ کا گراف کُھلتا ہے:

(a) اوپر کی طرف　(b) نیچے کی طرف　(c) بائیں طرف　(d) دائیں طرف

(vii) $y = x^2 - 9$ کا گراف کُھلتا ہے:

(a) اوپر کی طرف　(b) نیچے کی طرف　(c) بائیں طرف　(d) دائیں طرف

(viii) $y = 5^x$ __________ تفاعل ہے۔

(a) یک درجی　(b) دو درجی　(c) سہ درجی　(d) قوت نمائی

(ix) معکوس تفاعل ہے۔

(a) $y = 7^x$　(b) $y = \frac{2}{x}$　(c) $y = 2x^2$　(d) $y = 5x^3$

(x) $y = -3x^3 + 7$ __________ تفاعل ہے۔

(a) قوت نمائی　(b) سہ درجی　(c) یک درجی　(d) معکوس

2۔ درج ذیل کے گراف بنائیں:

(i) $y = 3^{-x}$، x کی قدروں –2 سے 4 تک　(ii) $y = \frac{2}{x}, x \neq 0$

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

3۔ ایک نئے رسالے کی فروخت کے بڑھنے کی توقع کو مساوات کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔

$S = 200000\,(1 - e^{-0.05t})$، یہاں t ہفتوں میں دیا گیا ہے۔

(a) پہلے 50 ہفتوں کے لیے فروخت کا گراف بنائیں۔

(b) فروخت ہونے والے رسالوں کی تعداد معلوم کریں، جب $t = 5$ اور $t = 35$ ہو۔

4۔ -5 سے 5 تک x کے لیے درج ذیل کا گراف بنائیں:

(i) $y = x^2 - 3$ (ii) $y = 15 - x^2$

5۔ -5 سے 4 تک x کے لیے $y = \frac{1}{2}(x + 4)(x - 1)(x - 3)$ کا گراف بنائیں۔

6۔ کسی خاص مارکیٹ کے لیے طلب اور رسد کے تفاعل مساواتوں کے ذریعے دیے گئے ہیں:

$$P_s = Q^2 + 5,\ P_d = Q^2 - 10Q$$

جہاں P قیمت اور Q تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

وقفہ $Q = -20$ سے $Q = 20$ پر ہر تفاعل کا گراف بنائیں۔

7۔ ایک ٹیلی ویژن بنانے والی کمپنی 40 انچ ایل ای ڈی بناتی ہے۔ x ایل ای ڈیز کی تیاری کی لاگت $C(x) = 60,000 + 250x$ ہے اور x ایل ای ڈیز کی فروخت سے حاصل ہونے والی آمدنی $R(x) = 1200x$ ہے۔ مساوی نقطہ معلوم کریں اور 100 ایل ای ڈیز فروخت ہونے پر نفع یا نقصان معلوم کریں۔ مساوی نقطہ گراف پر ظاہر کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ 11

لوسائی اور بناوٹ
(Loci and Construction)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- دو اضلاع اور اِن کے درمیانی زاویہ دیے جانے پر مثلث بنا سکیں۔
- ایک ضلع اور دو زاویے دیے جانے پر مثلث بنا سکیں۔
- دو اضلاع اور اِن میں سے ایک کے متقابلہ زاویہ دیے جانے پر مثلث بنا سکیں۔
- دی گئی مثلث کے زاویہ کا ناصف، عمودی ناصف، وسطانیہ، ارتفاع کھینچ سکیں اور ہم آہنگی کی تصدیق کر سکیں۔
- لوسائی اور نقاط کے سیٹ کے لیے لوسائی کے تقاطع کو دوُرخی سطح پر کھینچ سکیں جو کہ:
  - دیے گئے نقطہ سے مقررہ فاصلے پر ہو۔
  - دیے گئے خط سے مقررہ فاصلہ پر ہو۔
  - دو دیے گئے نقاط سے مساوی فاصلے پر ہو۔
  - دیے گئے دو متقاطع خطوط سے مساوی فاصلے پر ہو۔
- لوسائی اور لوسائی کے تقاطع کے استعمال سے حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

لوکس (لوسائی کی جمع) نقاط کا ایسا مجموعہ ہے جو ایک مقررہ قاعدے کی پیروی کرتا ہے۔ لوسائی نمونہ کو سمجھنے اور پیشن گوئی کرنے میں مفید ہے۔ مثال کے طور پر دو افراد جو کمرے میں ایک دُوسرے سے مقررہ فاصلے پر چل رہے ہیں۔ اِن کے ممکنہ مقامات وہ ہیں جہاں ہر شخص ایک مخصوص راستہ بناتا ہے۔ لوسائی کے مطالعہ سے ہم پیشن گوئی کر سکتے ہیں کہ ایک شخص کسی بھی وقت دُوسرے سے مل سکتا ہے۔ لوسائی کے تصوّر کو استعمال کرتے ہوئے ہم سٹیلائٹ کی زمین کے گرد چکر لگانے کی پیش گوئی کر سکتے ہیں کہ وہ کس خاص وقت پر کہاں ہوں گے۔ یہ مواصلات اور GPS ٹیکنالوجی جیسے شعبوں میں مدد کرتا ہے۔ لوسائی دوُرخی سطحوں میں مثلث، دائرہ، متوازی خطوط، عمودی ناصف اور زاویہ کے ناصف ہوتے ہیں۔

یاد رکھیے!

اِضلاع کے حوالے سے مثلث کی تین قسمیں ہیں:

مختلف الاضلاع مثلث (Scalene triangle):
تمام اضلاع مختلف لمبائیوں کے ہوتے ہیں۔

متساوی الساقین مثلث (Isosceles triangle):
دو اضلاع لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

مساوی الاضلاع مثلث (Equilateral triangle):
تمام اضلاع لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

زاویوں کے حوالے سے مثلث کی تین اقسام ہیں:

حادہ زاویہ مثلث (Acute angled triangle):
تمام زاویے 90° سے کم ہوتے ہیں۔

منفرجہ زاویہ مثلث (Obtuse angled triangle):
ایک زاویہ 90° سے زیادہ پیائش کا ہوتا ہے۔

قائمۃ الزاویہ مثلث (Right angled triangle):
ایک زاویہ 90° کے برابر ہوتا ہے۔

11.1 مثلثان کی بناوٹ (Construction of Triangles)

مثلث ایک بند شکل ہے جس کے تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔ ہم درج ذیل صورتوں میں مثلث بناتے ہیں۔

(a) جب تینوں اضلاع کی پیائش دی گئی ہو۔ (b) جب دو اضلاع اور اِن کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو۔

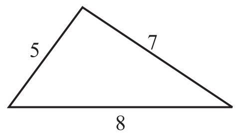
(c) جب ایک ضلع اور دو زاویوں کی پیائش دی گئی ہو۔

(d) جب دو اضلاع اور اُن میں سے ایک کے متقابلہ زاویے کی پیائش دی گئی ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

مسئلہ غیر مساوی مثلث

مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کا مجموعہ ہمیشہ تیسرے ضلع کی پیائش سے بڑا ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر ہم دی گئی شکل میں دیکھ سکتے ہیں کہ اگر ہم کسی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کو جمع کریں تو یہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑی ہوگی۔ یعنی



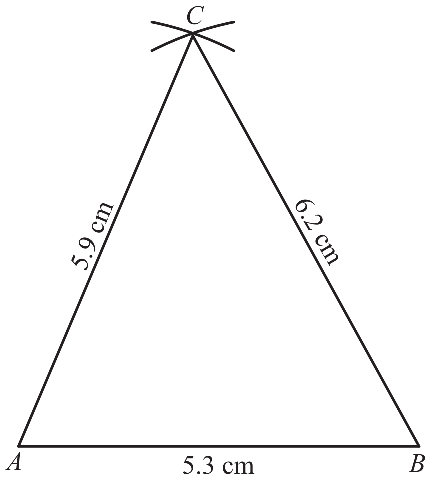
$5 + 7 > 8$ ، $5 + 8 > 7$ اور $7 + 8 > 5$

اہم حقیقت

- ایک متساوی الاضلاع مثلث، ایک حادہ زاویہ مثلث ہوتی ہے۔
- ایک قائمۃ الزاویہ مثلث، متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہو سکتی۔

(a) مثلث بنائیں جب کہ تین اضلاع کی پیمائش دی گئی ہو

مثال 1: ایک مثلث بنائیں جس کے اضلاع کی پیمائش 5.3 cm ، 5.9 cm اور 6.2 cm ہو۔



حل: مدارج عمل:

(i) ایک قطعہ خط AB ، 5.3 cm کھینچیں۔

(ii) پرکار کی مدد سے A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 5.9 cm اور 6.2 cm رداس کی دو قوسیں کھینچیں۔

(iii) یہ دونوں قوسیں ایک دُوسرے کو نقطہ C پر قطع کرتی ہیں۔

(iv) A اور B کو C سے ملائیں۔

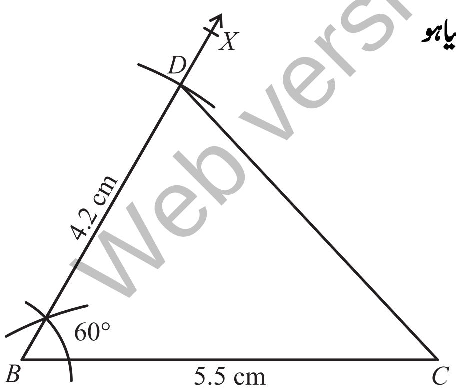
پس ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

نوٹ: زاویے °30، °45، °60، °75، °90، °105، °120، °135 اور °150 پرکار کی مدد سے بنائے جاسکتے ہیں۔ جب کہ دیگر زاویے پروٹریکٹر سے کھینچے جاتے ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں؟ جب تین اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں تو کسی بھی لمبائی کو پہلے کھینچا جاسکتا ہے۔

(b) مثلث بنائیں جب کہ دو اضلاع کی پیمائش اور اُن کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو

مثال 2: ایک مثلث BCD بنائیں جس میں دو اضلاع کی لمبائیاں 5.5 cm اور 4.2 cm ہوں اور اُن کا درمیانی زاویہ °60 ہو۔



حل: مدارج عمل:

(i) ایک قطعہ خط BC کھینچیں جس کی لمبائی 5.5 cm ہو۔

(ii) نقطہ B پر پُرکار کی مدد سے °60 کا زاویہ کھینچیں اور اِس زاویہ سے شعاع BX کھینچیں۔

(iii) نقطہ B کو مرکز مان کر 4.2 cm رداس کی ایک قوس کھینچیں جو شعاع BX کو نقطہ D پر قطع کرے۔

(iv) C اور D کو ملائیں۔

پس ΔBCD مطلوبہ مثلث ہے۔

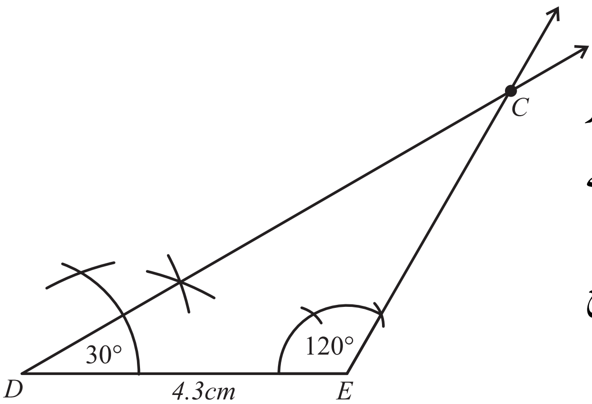
Web version of PCTBtextbook

NOT FOR SALE-PESRP

(c) مثلث بنائیں جب کہ ایک ضلع کی لمبائی اور دو زاویوں کی پیائش دی گئی ہو

مثال 3: ایک مثلث CDE بنائیں جب $m\overline{DE} = 4.3\text{ cm}$ ، $m\angle D = 30°$ اور $m\angle E = 120°$ ہو۔

حل: **مدارج عمل:**



(i) $m\overline{DE} = 4.3\text{ cm}$ کھینچیں۔

(ii) پُرکار کی مدد سے نقطہ D اور E پر بالترتیب $30°$ اور $120°$ کے زاویے کھینچیں۔ دونوں زاویوں کے راسوں D اور E سے دو شعاعیں کھینچیں۔

(iii) یہ دونوں شعاعیں ایک دُوسرے کو نقطہ C پر قطع کرتی ہیں۔

لہٰذا ΔCDE مطلوبہ مثلث ہے۔

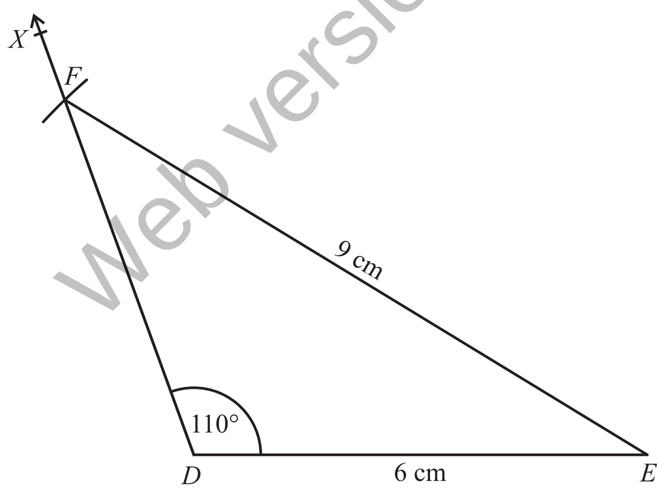
(d) مثلث بنائیں جب کہ دو اضلاع اور اُن میں سے ایک کے مخالف زاویے کی پیائش دی گئی ہو

دی گئی دو صورتوں پر غور کریں:

(i) اگر ایک زاویہ کی پیائش $90°$ سے زیادہ یا اِس کے برابر ہو۔ (ii) اگر زاویہ کی پیائش $90°$ سے کم ہو۔

مثال 4: ایک مثلث DEF بنائیں جب $m\overline{DE} = 6\text{ cm}$ ، $m\angle D = 110°$ اور $m\overline{EF} = 9\text{ cm}$ ہو۔

حل: **مدارج عمل:**



(i) $m\overline{DE} = 6\text{ cm}$ کھینچیں۔

(ii) پروٹریکٹر کی مدد سے $m\angle D = 110°$ بنائیں اور اِس زاویہ سے $\overrightarrow{DX}$ کھینچیں۔

(iii) نقطہ E کو مرکز مان کر 9 cm رداس کی ایک قوس کھینچیں جو $\overrightarrow{DX}$ کو نقطہ F پر قطع کرے۔

(iv) E اور F کو ملائیں۔

لہٰذا ΔDEF مطلوبہ مثلث ہے۔

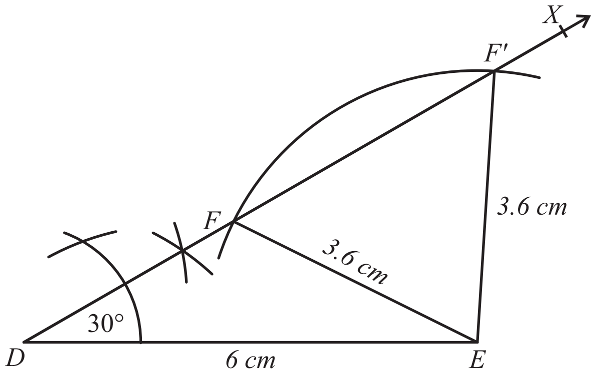
اگر دیا گیا مخالف زاویہ منفرجہ ہو تو صرف ایک مثلث ممکن ہوتی ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال 5: مثلثان DEF اور DEF′ بنائیں جب $m\overline{DE} = 6\text{ cm}$ ، $m\angle D = 30^\circ$ اور $m\overline{EF} = 3.6\text{ cm}$ ہو۔

حل: **مدارج عمل:**



(i) $m\overline{DE} = 6\text{ cm}$ کھینچیں۔

(ii) پُرکار کی مدد سے نقطہ D پر 30° کا زاویہ بنائیں اور اس پر $\overrightarrow{DX}$ کھینچیں۔

(iii) نقطہ E کو مرکز مان کر 3.6 cm رداس کی ایک قوس کھینچیں۔

(iv) یہ قوس $\overrightarrow{DX}$ کو دو نقاط F اور F' پر قطع کرتی ہے۔

(v) F اور F' کو E سے ملائیں۔

اِس طرح ہمیں دو مثلثان DEF اور DEF' حاصل ہوئی ہیں۔ یہ مبہم (غیر واضح) صورت کہلاتی ہے۔

> **کیا آپ جانتے ہیں؟**
> مبہم صورت SSA (ض۔ض۔ز) میں اُس وقت وقوع پذیر ہوتی ہے۔ جب ہمیں دو اضلاع اور اِن میں سے ایک کا مخالف زوایہ 90° سے کم دیا جاتا ہے۔

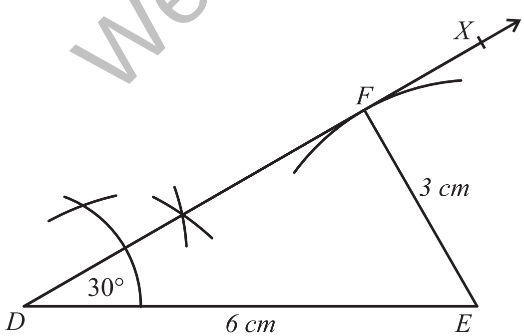
مثال 6: اوپر دی گئی مثال کو اگر ہم اِس طرح لیں:

(a) $m\overline{EF} = 3\text{ cm}$ (b) $m\overline{EF} = 2.5\text{ cm}$

مدارج عمل:

مثال 5 کے اقدام (i) اور (ii) کو دہرائیں۔

صورت (a)



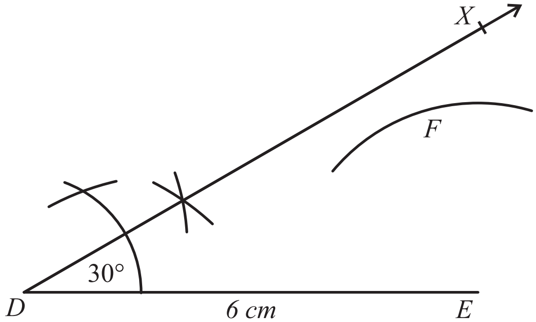
(i) نقطہ E کو مرکز مان کر 3 cm رداس کی ایک قوس کھینچیں جو کہ $\overrightarrow{DX}$ کو نقطہ F پر قطع کرتی ہے۔

(ii) E کو F سے ملائیں۔ یہاں $\overline{EF}$ ، $\overrightarrow{DX}$ پر عمود ہو گا۔

پس ΔDEF مطلوبہ مثلث ہے جو کہ ایک قائمتہ الزاویہ مثلث ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



صورت (b)

(i) اگر ہم $m\overline{EF} = 2.5$ cm، 3 cm سے کم لیں اور نقطہ E کو مرکز مان کر 2.5 cm رداس کی ایک قوس لگائیں۔

(ii) یہ قوس $\overrightarrow{DX}$ کو قطع نہیں کرتی۔

لہٰذا اِس صورت میں کوئی مثلث نہیں بن سکتی۔

یاد رکھیے!

جب حادہ زاویہ دیا جاتا ہے تو ہم تین صورتوں پر غور کرتے ہیں۔

- اگر $m\overline{EF} > 3$ cm ہو تو دو مثلثان ممکن ہوتی ہے۔
- اگر $m\overline{EF} < 3$ cm ہو تو کوئی مثلث ممکن نہیں ہوتی ہے۔
- اگر $m\overline{EF} = 3$ cm ہو تو صرف ایک مثلث ممکن ہوتی ہے۔

11.2 مثلث کے عمودی ناصف اور وسطانیے
(Perpendicular Bisectors and Medians of a Triangle)

عمودی ناصف (Perpendicular Bisector): عمودی ناصف ایک ایسا خط ہے جو ایک قطعہ خط کو قائمہ زاویہ پر قطع کرتا ہے اور اِس کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کرتا ہے۔ دُوسرے الفاظ میں، یہ قطعہ خط کو اس کے وسطی نقطہ (Mid point) پر قطع کرتا ہے اور اِس کے ساتھ قائمہ زاویہ بناتا ہے۔

وسطانیہ (Median): مثلث کا وسطانیہ ایک ایسا قطعہ خط ہوتا ہے جو مثلث کے کسی راس کو مخالف ضلع کے درمیانی نقطہ سے ملاتا ہے۔

ہم نقطہ (Point of Concurrency): ہم نقطہ وہ واحد مقام ہے۔ جہاں کسی ہندسی شکل میں تین یا زیادہ خطوط، شعاعیں یا قطعات خط آپس میں قطع کرتے یا ملتے ہیں۔ یہ تصّور عام طور پر مثلث میں اِستعمال ہوتا ہے۔ جہاں متعدد اہم قسم کے ہم آہنگی نقاط موجود ہوتے ہیں۔

مثال 7: مثلث EFG کے عمودی ناصف اور ان کے وسطانیے کھینچیں۔ جس میں $m\overline{EF} = 5$ cm، $m\overline{FG} = 2.5$ cm اور $m\overline{EG} = 4.3$ cm ہو۔

حل: پہلے ہم عمودی ناصف اور پھر وسطانیے کھینچیں گے۔

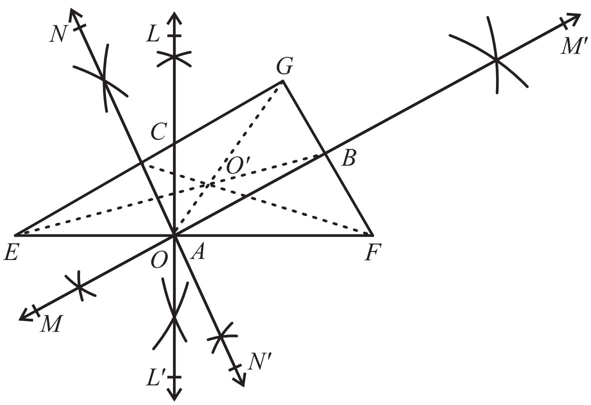
مدارج عمل:

(i) مثلث GEF بنائیں جیسا کہ پچھلی مثالوں میں بیان کیا گیا ہے۔

(ii) نقطہ E کو مرکز مان کر $m\overline{EF}$ کے نصف سے زیادہ رداس کی دو قوسیں، ایک $\overline{EF}$ کے اوپر اور ایک $\overline{EF}$ کے نیچے کھینچیں۔

(iii) اِس طرح نقطہ F کو مرکز مان کر $m\overline{EF}$ کے نصف سے زیادہ رداس کی دو قوسیں، ایک $\overline{EF}$ کے اوپر اور ایک $\overline{EF}$ کے نیچے کھینچیں۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook



(iv) اقدام (ii) اور (iii) کی اِن قوسوں کے نقاط تقاطع سے ایک خط کھینچیں جس سے ہمیں نقطہ A پر ضلع $\overline{EF}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{LL'}$ حاصل ہوتا ہے۔

(v) B اور C پر بالترتیب اضلاع FG اور EG کے دو مزید عمودی ناصف $\overleftrightarrow{MM'}$ اور $\overleftrightarrow{NN'}$ کھینچیں۔

(vi) نقطہ G کو مخالف وسطی نقطہ A سے ملائیں تاکہ $\overline{GA}$ وسطانیہ حاصل ہو۔

(vii) نقطہ F کو مخالف وسطی نقطہ C سے ملائیں تاکہ $\overline{FC}$ وسطانیہ حاصل ہو اور نقطہ E کو مخالف وسطی نقطہ B سے ملائیں تاکہ $\overline{EB}$ وسطانیہ حاصل ہو۔ پس، ہم دیکھتے ہیں کہ عمودی ناصف $\overleftrightarrow{LL'}$ ، $\overleftrightarrow{MM'}$ اور $\overleftrightarrow{NN'}$ نقطہ O پر ہم آہنگ ہیں اور وسطانیے $\overline{GA}$، $\overline{EB}$ اور $\overline{FC}$ نقطہ O پر ہم آہنگ ہیں۔

محاصرہ مرکز (Circumcentre)

مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف کے ہم نقطہ کو محاصرہ مرکز کہتے ہیں۔

مرکز نما (Centroid)

مثلث کے وسطانیوں کے ہم نقطہ کو مثلث کا مرکز نما کہا جاتا ہے۔

11.3 مثلث کے زاویہ کا ناصف (Angle Bisector of a Triangle)

مثلث کے زاویہ کا ناصف وہ خط یا شعاع ہوتی ہے جو ایک زاویہ کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کر کے دو چھوٹے زاویے بناتی ہے۔ جو متماثل ہوتے ہیں (ہر ایک کی پیمائش اصل زاویہ کی نصف مقدار ہوتی ہے)۔

مثال 8: مثلث FGH کے زاویوں کے ناصف کھینچیں اگر $m\overline{FG} = 5.2\text{cm}$ ، $m\overline{GH} = 4.1\text{cm}$ اور $m\angle FGH = 120°$ ہو۔

حل: پہلے ہم مثلث FGH بناتے ہیں پھر اس کے ناصف زاویے کھینچتے ہیں۔

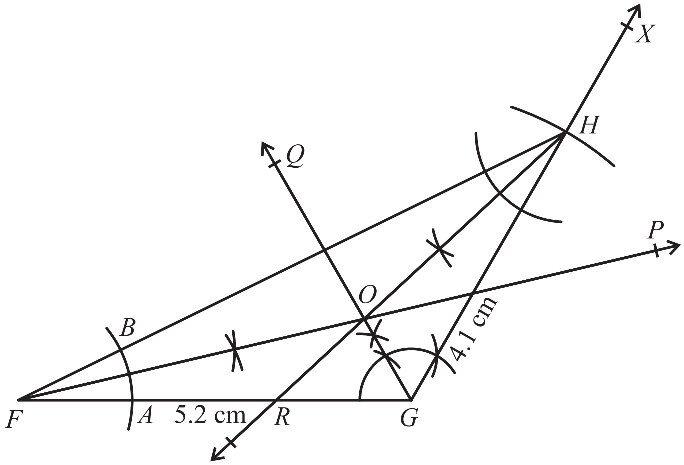
مدارج عمل:

(i) دی گئی لمبائیوں اور زاویے کے مطابق ΔFGH بنائیں۔

(ii) نقطہ F کو مرکز مان کر مناسب رداس کی قوس کھینچیں جو $\overline{FG}$ اور $\overline{FH}$ کو بالترتیب نقاط A اور B پر قطع کرے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

(iii) نقاط A اور B کو مراکز مان کر مناسب رداس کی دو قوسیں کھینچیں۔



(iv) نقطہ F سے ایک شعاع کھینچیں جو قدم (iii) میں قوسوں کے نقطہ تقاطع سے گزرے جو زاویہ F کا مطلوبہ ناصف $\overrightarrow{FP}$ ہے۔

(v) دو مزید زاویوں G اور H پر بالترتیب ناصف $\overrightarrow{GQ}$ اور $\overrightarrow{HR}$ کھینچیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ تمام زاویوں کے ناصف $\overrightarrow{FP}$ ، $\overrightarrow{GQ}$ اور $\overrightarrow{HR}$ ایک نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ یعنی مثلث کے ناصف زاویے ہم آہنگ ہیں۔

محصور مرکز (Incentre)

مثلث کے زاویوں کے ناصف جس نقطہ پر ملتے ہیں اُسے مثلث کا محصور مرکز کہا جاتا ہے۔

11.4 مثلث کے ارتفاع (اونچائی) (Altitudes of Triangle)

ارتفاع ایک ایسی شعاع ہے جو مثلث کے راس سے اِس کے مخالف ضلع پر عمود ہوتی ہے۔ مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں۔ جو ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں یعنی مثلث کے ارتفاع ہم آہنگ ہوتے ہیں۔

عمودی مرکز (Orthocentre)

مثلث کے ارتفاعات کا ہم آہنگ نقطہ عمودی مرکز کہلاتا ہے۔

مثال 9: مثلث GHI بنائیں جس میں $m\overline{GH} = 5.7\ cm$ ، $m\angle G = 68°$ اور $m\angle H = 50°$ ہو ثابت کریں کہ مثلث GHI کے ارتفاع کا ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

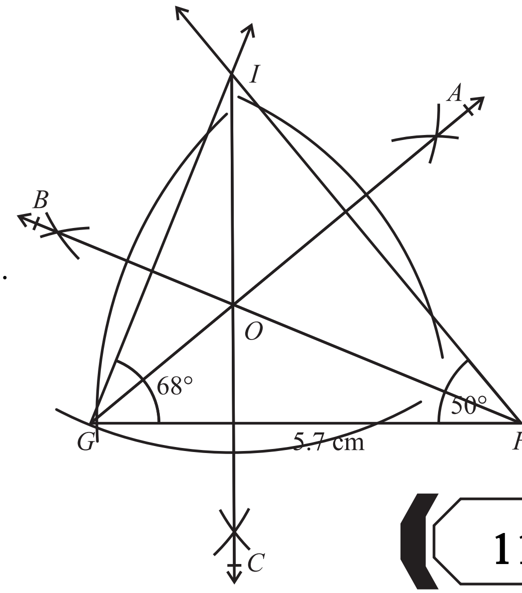
حل: پہلے ہم دی گئی پیمائشوں کو استعمال کرتے ہوئے مثلث GHI بناتے ہیں۔ پھر مثلث کے ارتفاع کھینچتے ہیں۔

مدارج عمل:

(i) دی گئی پیمائشوں کے مطابق مثلث GHI بنائیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



(ii) نقطہ G سے مخالف ضلع HI پر ایک عمود $\overrightarrow{GA}$ کھینچیں۔

(iii) دو مزید عمود $\overrightarrow{HB}$ اور $\overrightarrow{IC}$ کھینچیں۔ پہلا عمود نقطہ H سے ضلع GI پر اور دوسرا نقطہ I سے مخالف ضلع GH پر ہے۔

اِس طرح $\overrightarrow{GA}$ ، $\overrightarrow{HB}$ اور $\overrightarrow{IC}$ مثلث GHI کے ارتفاع ہیں اور یہ ایک ہی نقطہ "O" پر قطع کرتے ہیں۔ یعنی مثلث GHI کے ارتفاع ہم نقطہ ہیں۔

مشق 11.1

1۔ دی گئی پیمائشوں سے ΔABC بنائیں اور تصدیق کریں کہ مثلث کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں:

(i) $m\overline{AB} = 5$ cm ، $m\overline{BC} = 6$ cm اور $m\overline{AC} = 7$ cm

(ii) $m\overline{AB} = 7.1$ cm ، $m\angle B = 135°$ اور $m\overline{BC} = 6.5$ cm

2۔ درج ذیل پیمائشوں سے ΔLMN بنائیں اور تصدیق کریں کہ مثلث کے وسطانیے ہم نقطہ ہوتے ہیں:

(i) $m\overline{LM} = 4.9$ cm ، $m\angle L = 51°$ اور $m\angle M = 38°$

(ii) $m\overline{MN} = 4.8$ cm ، $m\angle N = 30°$ اور $m\overline{LM} = 8.1$ cm

3۔ تصدیق کریں کہ درج ذیل پیمائشوں سے ΔABC کے زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

(i) $m\overline{AB} = 4.5$ cm ، $m\angle A = 45°$ اور $m\overline{AC} = 5.3$ cm

(ii) $m\overline{AB} = 6$ cm ، $m\angle A = 150°$ اور $m\angle B = 60°$

4۔ مثلث DEF کی پیمائشیں دی گئی ہیں $m\overline{DE} = 4.8$ cm ، $m\overline{EF} = 4$ cm اور $m\angle E = 45°$ ۔ مثلث DEF کے عمود کھینچیں اور عمودی مرکز معلوم کریں۔

5۔ درج ذیل مثلثان بنائیں اور معلوم کریں کہ کیا کوئی مبہم صورت موجود ہے؟

(i) ΔBCD: $m\overline{BC} = 5$ cm ، $m\angle B = 62°$ اور $m\overline{CD} = 4.7$ cm

(ii) ΔKLM: $m\overline{LM} = 6$ cm ، $m\angle M = 42°$ اور $m\overline{LN} = 5$ cm

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

11.5 لوکس اور بناوٹ (Loci and Construction)

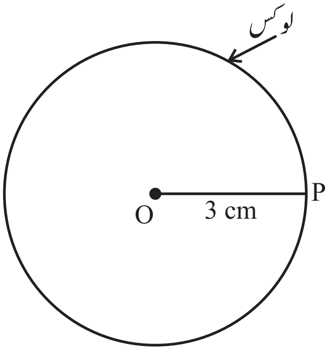
لوکس(لوسائی کی جمع) نقاط کا ایسا مجموعہ ہے جو ایک مقررہ قاعدے کا پابند ہے۔ جیومیٹری میں، لوکس عام طور پر نقاط کی کسی دوسرے نقطہ یا ہندسی اشکال کے لحاظ سے پوزیشن بیان کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ یہاں کچھ عام قسم کے لوکس کی تفصیل سے وضاحت کی جائے گی۔

11.5.1 دو سطحی لوکس (Loci in Two Dimension)

ہم دو رُخی سطح میں لوسائی (دائرہ، متوازی خطوط، عمودی ناصف، زاویہ کا ناصف) کا مطالعہ کرتے ہیں اور ان کو حقیقی زندگی میں استعمال کرتے ہیں۔

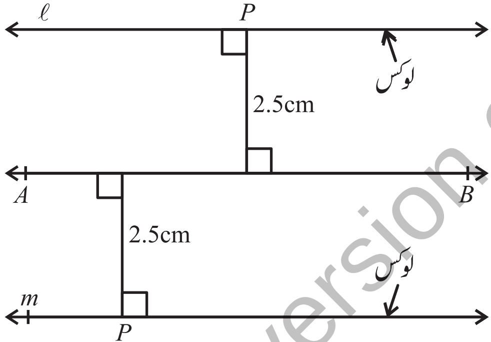
دائرہ (Circle)

ایک نقطہ کا لوسائی جو کسی معین نقطہ سے مستقل فاصلہ پر ہو۔ دائرہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر نقطہ P کا لوسائی جس کا فاصلہ معین نقطہ O سے 3 cm ہو ایک دائرہ بناتا ہے جس کا مرکز O ہے اور رداس 3 cm ہے۔

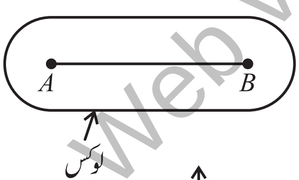


متوازی خطوط (Parallel Lines)

ایک نقطہ کا لوکس جو کسی معین خط سے مستقل فاصلے پر ہو۔ متوازی خطوط ہوتے ہیں جیسے ℓ اور m۔ مثلاً نقطہ P کا لوکس جس کا فاصلہ خط AB سے 2.5 cm ہو۔ متوازی خطوط ہوتے ہیں۔ جو خط AB سے 2.5 cm کے فاصلے پر ہوتے ہیں۔

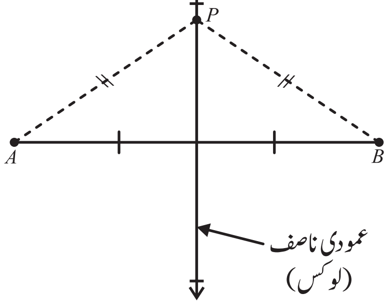


مثال کے طور پر، قطعہ خط سے مساوی فاصلہ پر نقاط کا لوکس ایک بیضوی شکل بناتا ہے۔ ہم اِس قسم کے لوکس کو ایک قطعہ خط کے اِرد گرد راستے کا سوچ سکتے ہیں۔



عمودی ناصف (Perpendicular Bisector)

ایک نقطہ کا لوکس جو دو معین نقاط سے برابر فاصلے پر ہوں۔ عمودی ناصف کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر نقطہ P کا لوکس معین نقاط A اور B سے برابر فاصلے پر ہو، قطعہ خط AB کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔



کیا آپ جانتے ہیں؟

لاطینی زبان میں لفظ لوکس کی تعریف انگریزی اصطلاح معینہ مقام سے ہوتی ہے۔

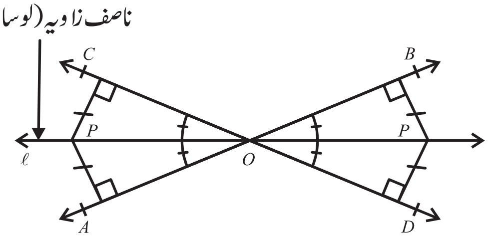
یاد رکھیے!

مساوی فاصلہ: فرض کریں A ایک مقررہ نقطہ ہے اور B نقاط کا مجموعہ ہے۔ اگر A، B کے تمام نقاط سے مساوی فاصلے پر ہو تو A کو B سے ہم فاصلہ کہا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

زاویہ کا ناصف (Angle Bisector)



ایک نقطہ کا لوسائی جو دو باہم تقاطع خطوط سے برابر فاصلے پر ہو زاویہ کا ناصف کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر نقطہ P کا لوسائی دونوں متقاطع خطوط AB اور CD جو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں سے برابر فاصلے پر ہے۔ $\angle AOC$ اور $\angle BOD$ کا ناصف "ℓ" ہے۔

یاد رکھیے!

- نقاط کا لوکس جو ایک معین نقطہ سے مساوی فاصلہ پر ہو دائرہ ہوتا ہے۔ اور دو معین نقاط سے مساوی فاصلہ پر ہو عمودی ناصف ہوتا ہے۔
- نقاط کا لوکس جو معین خط سے مساوی فاصلہ پر ہو متوازی خطوط ہوتے ہیں اور دو معین متقاطع خطوط سے مساوی فاصلہ پر ہو زاویہ کا ناصف ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

11.5.2 لوسائی کا تقاطع (Intersection of Loci)

اگر دو یا دو سے زیادہ لوسائی ایک نقطہ P پر قطع کرتے ہوں تو نقطہ P لوسائی کی تمام دی گئی شرائط کو پورا کرتا ہے۔ اِس کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی جائے گی:

مثال 10: ایک مستطیل $ABCD$ بنائیں، جس میں $m\overline{AB} = 3.5$ cm اور $m\overline{BC} = 2.3$ cm ہو تمام نقاط کا لوسائی کھینچیں جو کہ:

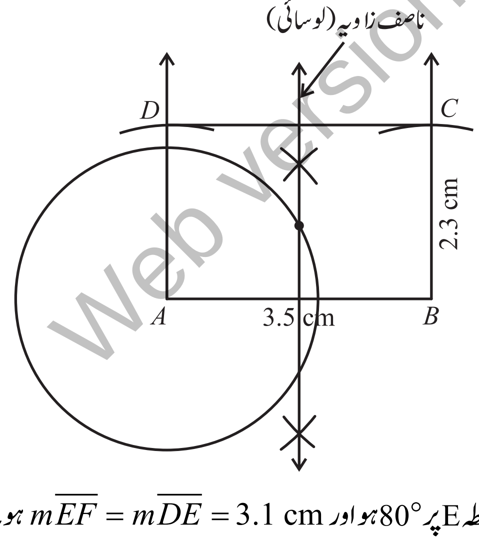
(i) نقطہ A سے 2 cm کے فاصلے پر ہوں۔ (ii) A اور B سے برابر فاصلے پر ہوں۔

مستطیل کے اندر نقطہ P پر ایک نشان لگائیں جو نقطہ A سے 2 cm کے فاصلے پر ہو اور A اور B سے برابر فاصلے پر ہو۔

حل: دی گئی پیمائشوں کے مطابق مستطیل $ABCD$ بنائیں۔

(i) نقطہ A کو مرکز مان کر 2 cm رداس کا ایک دائرہ کھینچیں۔

(ii) $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف کھینچیں۔

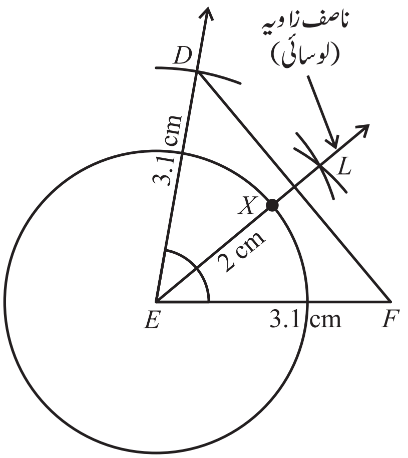


یہ دونوں لوسائی مستطیل کے اندر نقطہ P پر ایک دُوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ جو نقطہ A سے 2 cm اور A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

مثال 11: ایک متساوی الساقین مثلث DEF بنائیں جس کا عمودی زاویہ نقطہ E پر 80° ہو اور $m\overline{EF} = m\overline{DE} = 3.1$ cm ہو۔ تمام نقاط کا لوسائی کھینچیں جو کہ:

(i) نقطہ E سے 2 cm کے فاصلے پر ہو۔

NOT FOR SALE-PESRP



(ii) $\overline{DE}$ اور $\overline{EF}$ سے مساوی فاصلے پر ہوں۔ مثلث کے اندر نقطہ X کی نشان دہی کریں جو نقطہ E سے 2 cm ہو اور $\overline{ED}$ اور $\overline{EF}$ سے مساوی فاصلے پر ہو۔

حل: دی گئی پیمائشوں کے مطابق مثلث DEF بنائیں۔

(i) نقطہ E کو مرکز مان کر 2 cm رداس کا ایک دائرہ کھینچیں۔

(ii) زاویہ DEF کا ناصف زاویہ کھینچیں۔ یہ دونوں لوسائی مثلث کے اندر نقطہ X پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ جو نقطہ E سے 2 cm اور $\overline{ED}$ اور $\overline{EF}$ سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

مثال 12: ایک میدان LMN مثلثی شکل میں ہے۔ جس میں $m\overline{LM} = 69$ m ، $m\angle L = 60°$ اور $m\angle M = 45°$ ہو۔

(i) دی گئی پیمائشوں سے مثلث LMN بنائیں۔

(ii) تمام نقاط کا لوکس کھینچیں جو L اور M سے برابر فاصلے پر ہوں۔ $\overline{LN}$ اور $\overline{LM}$ سے برابر فاصلے پر ہوں اور مثلثی میدان کے اندر $\overline{LM}$ سے 13 m کے فاصلے پر ہوں۔

(iii) میدان کے اندر نقاط P اور Q پر دو درخت لگانے ہیں۔

(a) نقطہ P کی پوزیشن پر نشان لگائیں جو کہ نقاط L اور M سے برابر فاصلے پر ہو اور $\overline{LM}$ اور $\overline{LN}$ سے برابر فاصلے پر ہو۔

(b) نقطہ Q کی پوزیشن پر نشان لگائیں جو کہ $\overline{LM}$ اور $\overline{LN}$ سے برابر فاصلے پر ہو اور $\overline{LM}$ سے 13 m کے فاصلے پر ہو۔

(c) $m\overline{PQ}$ معلوم کریں۔

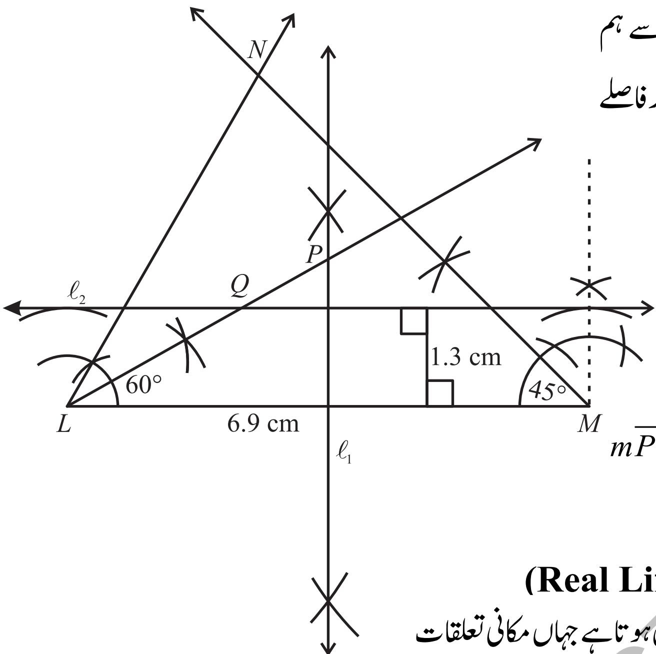
حل:

(i) دی گئی پیمائشوں کی 10 m = 1 cm کے سکیل کے مطابق مثلث LMN بنائیں۔

(ii) $\overline{LM}$ کا عمودی ناصف ℓ_1 کھینچیں۔ زاویہ MLN کا ناصف کھینچیں۔ مثلث LMN کے اندر $\overline{LM}$ سے 1.3 cm کے فاصلے پر ایک متوازی خط ℓ_2 کھینچیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP



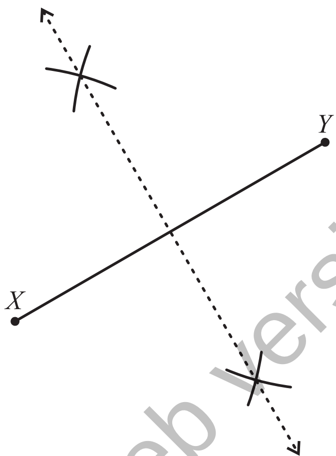
(iii) (a) نقطہ P لگائیں جو کہ L اور M سے ہم فاصلہ ہو اور $\overline{LM}$ اور $\overline{LN}$ سے بھی برابر فاصلے پر ہو۔

(b) نقطہ Q لگائیں جو $\overline{LM}$ اور $\overline{LN}$ سے برابر فاصلے پر ہو اور $\overline{LM}$ سے 1.3 cm کے فاصلے پر ہو۔

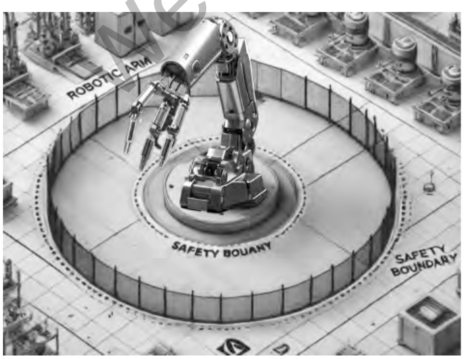
(c) $m\overline{PQ} = 1.3 \times 10 = 13 \text{ m}$

11.6 لوسائی کا حقیقی زندگی میں اطلاق
(Real Life Application of Loci)

لوسائی کا تصور مختلف شعبوں میں وسیع پیمانے پر استعمال ہوتا ہے جہاں مکانی تعلقات ، فاصلے یا مخصوص پابندیاں اہمیت رکھتی ہیں۔ یہاں مختلف انداز میں لوسائی کے استعمال کی وضاحت کرنے کے لیے تفصیلی مثالیں دی گئی ہیں۔



(i) ایک پارک میں پانی کے دو ذرائع دو مختلف جگہوں پر ہیں۔ ایک فائر ہائیڈرنٹ کو اِن دونوں ذرائع سے برابر فاصلہ پر لگانا ہے۔ فرض کریں پارک میں پانی کے دو ذرائع کو X اور Y سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\overline{XY}$ کا ناصف کھینچیں تاکہ وہ لوکس (مقام) معلوم ہو سکے جو دونوں ذرائع X اور Y سے ہم فاصلہ ہو۔



(ii) ایک کارخانے میں ایک روبوٹک بازو کو ایک مخصوص علاقے میں کام کرنے کے لیے نصب کیا گیا۔ تاکہ وہ دیگر آلات سے نہ ٹکرائے۔ روبوٹ کا ممکنہ لوکس ایک معین جگہ ہو گی۔ جیسے کہ ایک دائرہ یا مستطیلی خطہ ، جو یہ یقینی بناتا ہے کہ وہ اپنے مخصوص علاقہ کے اندر محفوظ طریقے سے کام کرے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مشق 11.2

1۔ دو نقاط A اور B کے درمیان فاصلہ 8.2 cm ہے۔ نقطہ A سے 5 cm کے فاصلے پر نقاط کا لوسائی بنائیں۔

2۔ $m\overline{CD} = 5.7$ cm کے قطعہ خط سے 2.2 cm کے فاصلے پر لوسائی بنائیں۔

3۔ $m\angle ABC = 105°$ بنائیں۔ نقطہ P کا لوسائی بنائیں جو $\overline{BA}$ اور $\overline{BC}$ سے برابر فاصلے پر حرکت کرتا ہو۔

4۔ دو نقاط E اور F کے درمیان فاصلہ 5.4 cm ہے۔ نقطہ P کا لوسائی بنائیں جو E اور F سے برابر فاصلے پر حرکت کرتا ہو۔

5۔ ایک جزیرے پر دو شہر A اور B ہیں جن کا درمیانی فاصلہ 8 km ہے۔ کاشف شہر A سے 6.8 km کے فاصلے پر جزیرے پر رہتا ہے اور شہر B سے 7.3 km کے فاصلے پر رہتا ہے۔ جزیرے پر اِن نقاط کی نشان دہی کریں۔ جہاں کاشف رہ سکتا ہے۔

6۔ ایک مثلث CDE بنائیں جس میں $m\overline{CD} = 7.6$ cm ، $m\angle D = 45°$ اور $m\overline{DE} = 5.9$ cm ہو۔ تمام نقاط کا لوسائی کھینچیں جو کہ:

(a) C اور D سے برابر فاصلے پر ہوں (b) $\overline{CD}$ اور $\overline{CE}$ سے برابر فاصلے پر ہوں

(c) نقطہ X کی نشان دہی کریں جہاں یہ دونوں لوسائی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

7۔ مثلث LMN بنائیں جس میں $m\overline{LM} = 7$ cm ، $m\angle L = 70°$ اور $m\angle M = 45°$ ہو۔ مثلث LMN کے اندر ایک ایسا نقطہ معلوم کریں جو L اور M سے برابر فاصلے پر ہو اور L سے 3 cm کے فاصلے پر ہو۔

8۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث RST بنائیں۔ جس میں $m\overline{RS} = 6.8$ cm ، $m\angle S = 90°$ اور $m\overline{ST} = 7.5$ cm ہو۔ مثلث RST کے اندر ایک ایسا نقطہ معلوم کریں جو $\overline{RS}$ اور $\overline{RT}$ سے برابر فاصلے پر ہو اور R سے 4.5 cm کے فاصلے پر ہو۔

9۔ ایک مستطیل $UVWX$ بنائیں جس میں $m\overline{UV} = 7.2$ cm اور $m\overline{VW} = 5.6$ cm ۔ نقاط کا لوسائی بنائیں جو $\overline{UV}$ سے 2 cm اور W سے 3.5 cm کے فاصلے پر ہوں۔

10۔ تصوّر کریں دو سیل ٹاور نقاط A اور B محدداتی مستوی پر واقع ہیں۔ ایک آلہ GPS مستوی پر کسی جگہ نصب ہے اور دونوں ٹاورز سے سگنل وصول کر رہا ہے۔ جہاز رانی کو یقینی بنانے کے لیے آلہ کو اِس جگہ پر نصب کیا گیا جو دونوں ٹاورز سے برابر فاصلے پر ہو۔ اِس راستہ کا لوسائی بنائیں۔

11۔ ماہر وبائی امراض لوسائی کا استعمال انفیکشن زدہ علاقوں کی نشان دہی کے لیے کرتے ہیں۔ خاص طور پر متعدی بیماریوں کے لیے، تاکہ پھیلاؤ کی پیشن گوئی اور حفاظتی اقدامات کیے جا سکیں۔ ایک بیماری کے پھیلاؤ کی صورت میں حکام ایک قرنطینہ علاقہ تعین کریں گے جو انفیکشن ذرائع سے 10 km کے اندر ہو گا۔ بیماری کے پھیلاؤ کی نگرانی اور کنٹرول کرنے کے لیے

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

قرنطینہ کے علاقے کی وضاحت کرتے ہوئے ماخذ سے 10 km کے فاصلے پر نقاط کا لوکس بنائیں۔

12۔ خزانہ ایک جزیرے پر کسی جگہ دفن ہے۔ خزانہ نقطہ A سے 24 km کے فاصلے پر ہے اور نقاط B اور C سے ہم فاصلہ ہیں۔ پیمانہ (سکیل) 10 km = 1 cm استعمال کرتے ہوئے وہ مقام معلوم کریں جہاں خزانہ دفن ہو سکتا ہے۔

13۔ سارہ کے گھر کے باغ میں ایک سیب کا درخت ہے جو کیلے کے درخت سے 90 m کے فاصلے پر ہے۔ سارہ ایک آم کا درخت M لگانا چاہتی ہے جو سیب کے درخت سے 64 m اور کیلے کے درخت سے 54 m اور 82 m کے درمیانی فاصلے پر ہو۔ پیمانہ (سکیل) 10 m = 1 cm استعمال کرتے ہوئے وہ مقام معلوم کریں جہاں آم کا درخت لگایا جائے۔

جائزہ مشق 11

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) ایک مثلث بنائی جا سکتی ہے۔ اگر کسی دو اضلاع کا مجموعہ تیسرے ضلع کی پیمائش سے __________ ہو:

(a) کم　(b) زیادہ　(c) برابر　(d) زیادہ اور برابر

(ii) ایک متساوی الاضلاع مثلث __________:

(a) متساوی الساقین ہو سکتی ہے　(b) قائمتہ الزاویہ ہو سکتی ہے

(c) منفرجہ زاویہ ہو سکتی ہے　(d) اِس کا ہر زاویہ 50° کا ہوتا ہے

(iii) اگر دو زاویوں کا مجموعہ 90° سے کم ہو، تو مثلث __________ ہوتی ہے۔

(a) متساوی الاضلاع　(b) حادہ زاویہ　(c) منفرجہ زاویہ　(d) قائمتہ الزاویہ

(iv) وہ قطعہ خط جو ایک مثلث کے ضلع کے وسطی نقطہ کو مخالف راس سے ملاتا ہے، کہلاتا ہے:

(a) وسطانیہ　(b) عمودی ناصف　(c) زاویہ کا ناصف　(d) دائرہ

(v) مثلث کے ناصف زاویے __________ پر قطع کرتے ہیں۔

(a) ایک نقطہ　(b) دو نقاط　(c) تین نقاط　(d) چار نقاط

(vi) تمام نقاط کا لوکس جو کسی معین نقطہ سے برابر فاصلے پر ہو __________ کہلاتا ہے۔

(a) دائرہ　(b) عمودی ناصف　(c) زاویہ کا ناصف　(d) متوازی خطوط

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(vii) نقاط کا لوسائی جو دو معین نقاط سے برابر فاصلے پر ہوں، __________ کہلاتا ہے۔

(a) دائرہ (b) عمودی ناصف (c) زاویہ کا ناصف (d) متوازی خطوط

(viii) نقاط کا لوسائی جو کسی معین خط سے برابر فاصلے پر ہوں، __________ کہلاتا ہے۔

(a) دائرہ (b) عمودی ناصف (c) زاویہ کا ناصف (d) متوازی خطوط

(ix) نقاط کا لوسائی جو دو باہم ملتے خطوط سے برابر فاصلے پر ہوں، __________ کہلاتا ہے۔

(a) دائرہ (b) عمودی ناصف (c) زاویہ کا ناصف (d) متوازی خطوط

(x) تمام نقاط کا سیٹ جو کسی معین نقطہ B سے 2 km سے زیادہ کے فاصلے پر ہوں ایک دائرے کے باہر کا علاقہ جس کا رداس __________ اور مرکز B ہوتا ہے۔

(a) 1 km (b) 1.9 km (c) 2 km (d) 2.1 km

2۔ ایک قائمتہ الزاویہ مثلث بنائیں جس کے اضلاع کی لمبائیاں 6 cm، 8 cm اور 10 cm ہو۔

3۔ ایک مثلث ABC بنائیں جس میں $m\overline{AB} = 5.3$ cm، $m\angle A = 30°$ اور $m\angle B = 120°$ ہو۔ تمام نقاط کا لوسائی بنائیں جو A اور B سے برابر فاصلے پر ہوں۔

4۔ ایک مثلث بنائیں جس میں $m\overline{DE} = 7.3$ cm، $m\angle D = 42°$ اور $m\overline{EF} = 5.4$ cm ہو۔

5۔ ایک مثلث XYZ بنائیں جس میں $m\overline{YX} = 8$ cm، $m\overline{YZ} = 7$ cm اور $m\overline{XZ} = 6.5$ cm ہو۔ اِن تمام نقاط کے لوسائی بنائیں جو $\overline{XY}$ اور $\overline{XZ}$ سے مساوی فاصلے پر ہوں۔

6۔ ایک مثلث FGH بنائیں جس میں $m\overline{FG} = m\overline{GH} = 6.4$ cm اور $m\angle G = 122°$ ہو۔ تمام نقاط کا لوسائی بنائیں جو کہ:

(a) F اور G سے مساوی فاصلہ پر ہوں (b) $\overline{FG}$ اور $\overline{GH}$ سے مساوی فاصلے پر ہوں۔

(c) نقطہ کی نشان دہی کریں جہاں دونوں لوکس ایک دُوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

7۔ دو گھروں Q اور R کا درمیانی فاصلہ 73 m ہے۔ پیمانہ (سکیل): 10 m = 1 cm استعمال کرتے ہوئے، نقطہ P کا لوسائی بنائیں جو اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ:

(i) Q سے 32 m کے فاصلے پر ہوں (ii) Q اور R کو ملانے والے خط سے 48 m کے فاصلے پر ہوں

8۔ ایک میدان مستطیل $ABCD$ کی شکل میں ہے جس میں $m\overline{AB} = 70$ m اور $m\overline{BC} = 60$ m ہو۔ پیمانہ (سکیل) 10 m = 1 cm استعمال کرتے ہوئے مستطیل $ABCD$ بنائیں۔ میدان کے اندر وہ خطہ دکھائیں جو نقطہ C سے 30 m سے کم فاصلے پر ہو اور $\overline{AB}$ سے 25 m سے زیادہ فاصلے پر ہو۔

Web version of PCTBtextbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ
12

معلوماتی معاملات
(Information Handling)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- تعددی تقسیم کے جدول کے لیے کالمی نقشہ (غیر مساوی جماعتی حدود کے لیے) اور تعددی کثیر الاضلاع کھینچ سکیں۔
- تعددی تقسیم کے جدول کا اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کر سکیں۔
- حقیقی روز مرہ زندگی سے متعلق حسابی اوسط، اوزانی اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کر سکیں۔ (جیسا کہ مختلف منصوبوں میں فنڈز کی تقسیم، مستقبل میں آبادی کی پیش گوئی، مارکیٹنگ اور سرکاری بجٹ کی پیش گوئی)۔

تعارف (Introduction)

معلومات کے بارے میں جاننے سے پہلے ہمیں اس طرح کے سوالات کے جوابات کے بارے میں سوچنا ہوگا۔ مثلاً ایک مخصوص سکول کے ہر جماعت میں کتنے طلبہ تھے؟ ایک مخصوص ہفتے کے اندر ہسپتال میں کتنے مریض آئے؟ ان تمام سوالوں کے جواب کے لیے ہمیں اعدادی معلومات درکار ہیں۔ جو اعداد و شمار گننے سے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یاد رہے صرف 85، 96، 70، 80، 73، 70، 65، 83، 89، 75 لکھ دینا شماریاتی معلومات نہیں ہیں بلکہ اگر ہم اس کے ساتھ کہیں کہ یہ مواد مختلف جماعتوں کے طلبہ کے نمبروں کی نشان دہی کرتا ہے تو یہ اعداد شماریاتی معلومات ہیں جو اپنے اندر ایک جامعہ مفہوم رکھتی ہیں۔ پس کسی چیز کے بارے میں جاننا معلومات کہلاتا ہے اور ان معاملات کو تجزیے اور توسیع کے لیے مناسب طریقے سے پیش کرنے کا نام معلوماتی معاملات کہلاتا ہے۔ لہٰذا بامعنی معلومات کو اعداد و شمار کی شکل میں اکٹھا کرنا مواد (Data) کہلاتا ہے۔

اعداد و شمار علم کے کسی بھی شعبے سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر آپ کی جماعت میں طلبہ کی کمیت، ایک ماہ میں کسی دکان دار کی طرف سے فروخت کیے گئے جوتوں کی تعداد وغیرہ۔ مواد کو موجودہ ذرائع سے حاصل کیا جاسکتا ہے مثلاً دفتری ریکارڈ، شائع شدہ اخبارات یا براہ راست بھی کسی شعبے سے ضرورت کے مطابق حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

تاریخ

شماریات میں معلوماتی معاملات کو موادی معاملات بھی جانا جاتا ہے۔ موادی معاملات معلومات کو مناسب طریقے سے پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ ڈیٹا ہینڈلنگ کا لفظ سب پہلے سر رونلڈ ایلمر فشر نے استعمال کیا۔

سر رونلڈ ایلمر فشر
(Sir Ronald Aylmer Fisher)
(17 فروری 1899 تا 29 جولائی 1962)

NOT FOR SALE-PESRP

معلوماتی معاملات (Information Handling)

معلوماتی معاملات اعدادی مواد کو جمع کرنے، ترتیب دینے، تلخیص کرنے، تجزیہ کرنے اور تشریح کرنے کا عمل ہے۔
مواد کو مزید دو حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

(i) **غیر مسلسل مواد (Discrete Data)**: یہ صرف چند مخصوص قدریں لے سکتا ہے۔ غیر مسلسل مواد کو لکھنے کے لیے مکمل اعداد استعمال کیے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک دکان دار کی طرف سے فروخت کردہ کُتب کی تعداد، ایک ہفتے میں ہسپتال جانے والے مریضوں کی تعداد وغیرہ یہ مواد صرف گنتی سے حاصل کیا جاتا ہے۔

(ii) **مسلسل مواد (Continuous Data)**: یہ ایک مقررہ وقفہ میں ہر ممکنہ قدر لے سکتا ہے۔ مسلسل مواد لکھنے کے لیے اعشاری اعداد استعمال کیے جاتے ہیں۔ یہ مواد صرف پیمائش کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔ جیسا کہ جماعت میں طلبہ کی کمیت مثلاً 28.5 کلو گرام، 26.5 کلو گرام، 27.5 کلو گرام وغیرہ۔

12.1 غیر گروہی مواد اور گروہی مواد (Ungrouped Data and Grouped Data)

وہ مواد جو کسی منظم ترتیب (گروپس یا کلاسز) میں ترتیب نہ دیا گیا ہو اسے غیر گروہی مواد کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک ماہ میں دکان دار کے فروخت کیے گئے کھلونوں کی تعداد درج ذیل ہے:

10, 5, 8, 12, 15, 20, 25, 30, 23, 15, 23, 21, 18, 15 17,
23, 22, 15, 20, 21, 24, 18, 16, 21, 23, 21, 17, 19, 21, 23

اس مواد کو غیر گروہی مواد کہا جاتا ہے۔ اگر ہم اوپر دیے گئے مواد کو گروہوں یا جماعتوں میں ترتیب دیں تو اسے گروہی مواد کہا جاتا ہے۔

فروخت کیے گئے کھلونوں کی تعداد	ٹیلی نشان	جماعتی حدود
2	||	5 – 9
2	||	10 – 14
10	𝍸 𝍸	15 – 19
14	𝍸 𝍸 ||||	20 – 24
1	|	25 – 29
1	|	30 – 34

کیا آپ جانتے ہیں؟
غیر گروہی مواد خام مواد کے نام سے بھی جانا جاتا ہے۔

برائے اساتذہ!
طلبہ کو زیادہ مثالوں کے استعمال سے گروہی مواد اور غیر گروہی مواد کے تصوّر کو واضح کریں۔

مندرجہ بالا گروہی مواد میں 5، 10، 15، 20، 25 اور 30 زیریں جماعتی حدود ہیں اور 9، 14، 19، 24، 29 اور 34 بالائی جماعتی حدود ہیں۔

12.1.1 تعددی تقسیم (Frequency Distribution)

ایک جدول میں مدات کی اس تعداد کو جو کسی جماعتی حد یا گروپ کے بالمقابل آتی ہو اسے تعددی تقسیم کہا جاتا ہے دوسرے الفاظ میں مواد کی مختلف اشیا کو

ذرا سوچیے!
اگر جماعتی حدود کا سائز 6 ہے۔ سب سے بڑی قدر 80 اور سب سے چھوٹی قدر 25 ہو تو کیا آپ جماعتی حدود کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

خاص جماعتی حدود (جماعتیں) میں درجہ بندی کی جاتی ہے اور ہر جماعت میں موجود اشیا کی تعداد کو ان کے سامنے رکھا جاتا ہے۔ اس طرح سے ترتیب دیے گئے مواد کو تعددی تقسیم کہتے ہیں۔

تعددی تقسیم کی تشکیل (Formation of Frequency Distribution)

اس طریقہ میں خام یا غیر گروہی مواد کو جماعتوں میں پیش کیا جاتا ہے۔ جماعتوں کی تعداد کو ہم اپنی مرضی کے مطابق لے سکتے ہیں۔ عام طور پر جماعتی حدود کی جسامت کا تعین سب سے بڑی مد، سب سے چھوٹی مد اور جماعتوں کی مطلوبہ تعداد کو مدِ نظر رکھتے ہوئے کیا جاتا ہے۔

تعددی تقسیم کی تشکیل کے لیے درج ذیل اہم اقدامات کیے جاتے ہیں:

(i) مواد کی سعت (range) معلوم کریں۔ سب سے بڑی مد اور سب سے چھوٹی مد کے درمیان فرق سعت ہے۔

سب سے چھوٹی مد − سب سے بڑی مد = سعت

یاد رکھیے!

مواد میں بار بار آنے والی قیمت کو اس قیمت کی تعداد کہتے ہیں۔ اسے 'f' لکھتے ہیں۔

(ii) آپ جتنی بھی جماعت یا گروہ کی تعداد رکھنا چاہیں اِس سے سعت کو تقسیم کرنے سے جماعتی حدود کی جسامت معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر سب سے بڑی مد 136 اور سب سے چھوٹی مد 30 ہو اور اگر ہم 10 جماعتیں بنانا چاہتے ہیں تو جماعتی حدود کی جسامت کو دیے گئے کلیہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\text{جماعتی حدود کی جسامت} = \frac{\text{سعت}}{\text{جماعتوں کی تعداد}} = \frac{\text{سب سے بڑی مد} - \text{سب سے چھوٹی مد}}{\text{جماعتوں کی تعداد}}$$

$$= \frac{136-30}{10} = 10.6 \approx 11$$

پس جماعتی حدود کی جسامت = 11

(iii) چار کالم بنائیں۔

(a) جماعتی حدود (b) ٹیلی نشان (c) تعدد (d) حقیقی جماعتی حدود

(iv) جماعتی حدود بنائیں جن کی جسامت 11 ہو۔ سب سے چھوٹی مد سے شروع کریں۔ مثال کے طور پر 40 − 30، 51 − 41، 62 − 52 وغیرہ۔

(v) غیر گروہی مواد سے ہر ایک مد کے لیے دیکھا جائے کہ یہ کس جماعت میں آتا ہے۔ اب ایک چھوٹا ٹیلی نشان "|" اس جماعت کے سامنے لگایا جائے۔ جب کسی مد کو کسی جماعت میں شامل کر دیا جائے تو اِس کے اوپر نشان (✓) لگا دیا جاتا ہے۔ اس طرح آپ یاد رکھ سکتے ہیں کہ آپ نے مد کو شمار کر لیا ہے۔ اس طرح اگلی مد سے مواد کی آخری مد تک جاری رکھیں۔ اِس بات کو ذہن میں رکھیں کہ اگر 5 یا اِس سے زیادہ ٹیلی نشان کبھی ایک گروہ میں آئیں تو پانچواں ٹیلی نشان ترچھا لگائیں تاکہ گنتی میں آسانی رہے۔ جیسا کہ ~~||||~~

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(vi) حقیقی جماعتی حدود (class boundaries) کو عام طور پر درج ذیل طریقہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

- پہلی جماعت کی بالائی جماعتی حدود اور دوسری جماعت کی زیریں جماعتی حدود کا انتخاب کریں۔
- ان دونوں حدود کے درمیان فرق معلوم کریں۔
- اس فرق کو 2 سے تقسیم کریں اور اس قیمت کو زیریں جماعتی حدود میں سے تفریق کریں اور بالائی جماعتی حدود میں جمع کریں۔

> **کیا آپ جانتے ہیں؟**
>
> حقیقی جماعتی حدود کو درمیانی نقطہ x سے بھی معلوم کیا جا سکتا ہے۔ جیسے: $\left(x \pm \frac{h}{2}\right)$
>
> جہاں x، h کی کوئی دو مسلسل قیمتوں کا فرق ہے۔

مثال 1: ایک ہائی سکول کے 30 اساتذہ کو ایک ہفتہ میں جو ٹیلی فون کالز موصول ہوئیں وہ درج ذیل ہیں۔

5	8	11	25	13	16	20	17	15	16	30	21	14	18	19
6	22	26	15	19	35	29	31	23	25	20	10	9	7	26

جماعتوں کی تعداد 7 لے کر تعددی تقسیم بنائیں۔

حل: (i) سعت معلوم کریں۔

سب سے بڑی مد $= 35$ ؛ سب سے چھوٹی مد $= 5$

سعت = سب سے بڑی مد − سب سے چھوٹی مد

$= 35 - 5 = 30$

(ii) جماعتی حدود کی جسامت = $\frac{\text{سعت}}{\text{جماعتوں کی تعداد}} = \frac{30}{7} = 4.28 \approx 5$

(iii) جماعتی حدود کی جسامت 5 لے کر جماعتی حدود بنائیں۔ مثلاً 9 – 5، 14 – 10، 19 – 15 وغیرہ (جدول 1 کا کالم 1 دیکھیں)

(iv) ہر مد کو اسی کے جماعتی حدود میں گننے کے لیے ٹیلی نشان کا استعمال کریں۔ (جدول 1 کا کالم نمبر 2 دیکھیں)

(v) اب ٹیلی نشان کو گنیں اور اس کی تعداد کو تعدد والے کالم میں لکھیں۔ (جدول 1 کا کالم نمبر 3 دیکھیں)

(vi) **حقیقی جماعتی حدود:** پہلی جماعت کی بالائی جماعتی حدود اور دوسری جماعت کی زیریں جماعتی حدود کا فرق 1 ہے $(10 - 9 = 1)$۔ اب ان دونوں حدود کے فرق کو 2 سے تقسیم کریں یعنی $\frac{1}{2} = 0.5$

زیریں جماعتی حدود میں سے 0.5 تفریق کرنے سے زیریں حقیقی جماعتی حدود حاصل ہوتی ہیں۔

بالائی جماعتی حدود میں 0.5 جمع کرنے سے بالائی حقیقی جماعتی حدود حاصل ہوتی ہیں۔

حقیقی بالائی جماعتی حدود	حقیقی زیریں جماعتی حدود
$9 + 0.5$	$5 - 0.5$
9.5 اور اسی طرح	4.5 اور اسی طرح

جدول 1 کا کالم نمبر 4 دیکھیں

> **کیا آپ جانتے ہیں؟**
>
> اپنی جماعت کے 50 طلبہ کی اونچائیوں کو اکٹھا کریں اور مواد کو گروہی مواد میں تبدیل کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جدول-1

جماعتی حدود	ٹیلی نشان	تعدد (f)	حقیقی جماعتی حدود
5 – 9	𝍸	5	4.5 – 9.5
10 – 14	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	9.5 – 14.5
15 – 19	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8	14.5 – 19.5
20 – 24	𝍸	5	19.5 – 24.5
25 – 29	𝍸	5	24.5 – 29.5
30 – 34	𝍷𝍷	2	29.5 – 34.5
35 – 39	𝍷	1	34.5 – 39.5

12.1.2　تعددی تقسیم کا گراف (Graph of Frequency Distribution)

تعددی تقسیم کو گراف پر ظاہر کرنے کے لیے درج ذیل اقسام کے گراف استعمال کیے جاتے ہیں۔

(a) کالمی نقشہ　　(b) تعددی کثیر الاضلاع

(a) کالمی نقشہ (Histogram) (مساوی جماعتی حدود کے ساتھ)

کیا آپ جانتے ہیں؟
مسلسل مواد کی نمائندگی زیادہ تر کالمی نقشہ اور تعدد کثیر الاضلاع کے ذریعے کی جاتی ہے۔

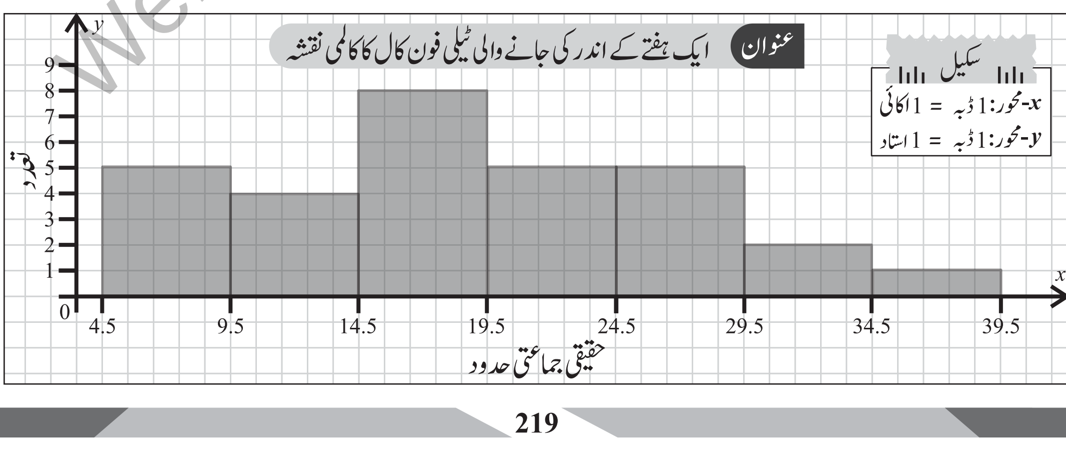
یہ xy-مستوی پر بنائی گئی ملحقہ مستطیلوں کا گراف ہے۔ کالمی نقشہ، بار گراف کے مشابہ ہے۔ لیکن یہ تعددی تقسیم کے لیے بنایا جاتا ہے۔ کالمی نقشہ میں مواد کی اقدار کو افقی محور کے ساتھ ظاہر کیا جاتا ہے اور تعدادت کو افقی محور پر عمودی بار سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ انفرادی جماعت کے تعدد کو ظاہر کرنے کے لیے کالموں کی مساوی چوڑائی کو استعمال کیا جاتا ہے۔ کالمی نقشہ بنانے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

(i) x- محور اور y- محور کو گراف پیپر پر ایک دوسرے پر عمود اً ظاہر کریں۔

(ii) حقیقی جماعتی حدود کو x- محور پر ظاہر کریں۔ شکل میں دی گئی مستطیلیں اس طرح بنائی جائیں کہ چوڑائیاں جماعتی حدود کی جسامت کے متناسب ہوں اور اونچائیاں جماعتی حدود کے تعدد کے متناسب ہوں۔

(iii) پیمانہ مقرر کرتے ہوئے تعدادات کو y- محور پر ظاہر کریں۔ اس نتیجہ میں جو خاکہ بنے وہ کالمی نقشہ کہلاتا ہے۔

جدول 1 کے کالمی نقشہ کو نیچے دیا گیا ہے۔

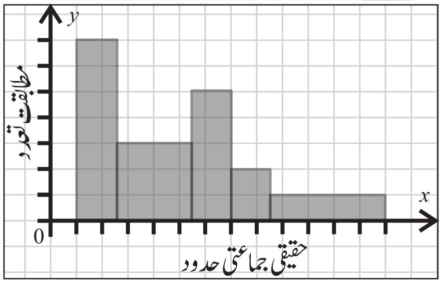


Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

12.1.3 کالمی نقشہ (Histogram) (غیر مساوی جماعتی حدود کے ساتھ)

عنوان کالمی نقشہ غیر مساوی جماعتی حدود کے لیے



کالمی نقشہ بنانے کا طریقہ کار ذیل میں دیا گیا ہے۔

(i) x- محور اور y- محور کو گراف پیپر پر عموداً ظاہر کریں۔

(ii) حقیقی جماعتی حدود کو x- محور پر ظاہر کریں۔ ہر حقیقی جماعتی حدود کے بالمقابل ایک مستطیل بنائیں۔ جس کی چوڑائی ہر جماعتی حدود کی جسامت کے متناسب ہو اور اونچائی جماعتی حدود کے تعددات کے متناسب ہو۔

(iii) اس کو مستطیل کی اونچائیوں میں مطابقت پیدا کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہر جماعت کے تعدد کو اس کی جماعتی حدود کی جسامت پر تقسیم کر کے ہر مستطیل کی اونچائی کو حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2: ایک علاقہ کے 76 افراد کی عمر (سالوں میں) کی تعددی تقسیم دی گئی ہے۔ اس مواد کے لیے کالمی نقشہ بنائیں۔

جماعتی حدود	2 – 4	4 – 9	9 – 12	12 – 17	17 – 20	20 – 27	27 – 30
تعدد (f)	7	10	18	20	10	7	4

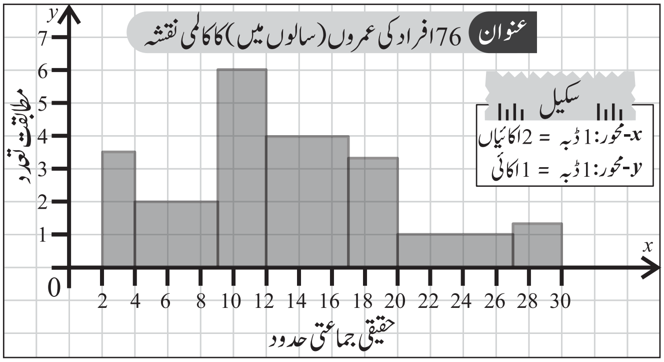
حل: اس جدول کو دیکھیں جو اس بات کی نشان دہی کرتا ہے کہ جماعتی حدودں کی جسامت برابر نہیں ہے۔ جیسا کہ پہلی جماعت کی چوڑائی 2 ہے، دوسری کی 5 ہے، تیسری کی 3 ہے، چوتھی کی 5 ہے، پانچویں کی 3 ہے، چھٹی جماعت کی 7 ہے اور ساتویں جماعت کی جسامت 3 ہے۔ لہٰذا یہاں مستطیلوں کی اونچائیوں میں مطابقت پیدا کرنے کی ضرورت ہے۔ جیسا کہ پہلی جماعت کے لیے ہمارے پاس چوڑائی 2 اور تعدد 7 ہے تو پہلی جماعت کی اونچائی $\frac{7}{2} = 3.5$ ہے، اسی طرح دوسروں کے لیے اونچائی $\frac{10}{5} = 2$، $\frac{18}{3} = 6$، $\frac{20}{5} = 4$، $\frac{10}{3} = 3.3$، $\frac{7}{7} = 1$، $\frac{4}{3} = 1.3$ ہے۔ ان متناسب اونچائیوں کو مطابقت شدہ تعدد بھی کہا جاتا ہے۔

جماعتی حدود	تعدد (f)	جماعت کی ضخامت	مستطیل کی اونچائی (مطابقت تعدد)
2 – 4	7	4 – 2 = 2	$\frac{7}{2} = 3.5$
4 – 9	10	9 – 4 = 5	$\frac{10}{5} = 2$
9 – 12	18	12 – 9 = 3	$\frac{18}{3} = 6$
12 – 17	20	17 – 12 = 5	$\frac{20}{5} = 4$
17 – 20	10	20 – 17 = 3	$\frac{10}{3} = 3.3$
20 – 27	7	27 – 20 = 7	$\frac{7}{7} = 1$
27 – 30	4	30 – 27 = 3	$\frac{4}{3} = 1.3$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

x- محور کے ساتھ حقیقی جماعتی حدود اور y- محور کے ساتھ مطابقت شدہ تعدد کو لے کر مستطیلیں بنائی گئی ہیں اور کالمی نقشہ بائیں طرف دیا گیا ہے۔



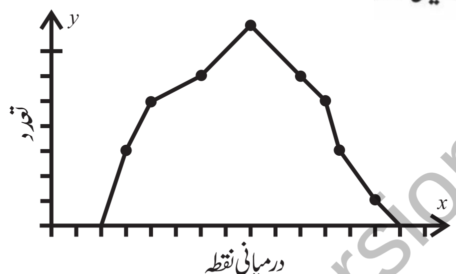
12.1.4 تعددی کثیر الاضلاع (Frequency Polygon)

تعددی کثیر الاضلاع ایک جیومیٹریکل بند شکل ہے جو تعددی تقسیم کو گرافی طور پر ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوتی ہے۔

تعددی تقسیم کے خطی گراف کو تعددی کثیر الاضلاع کہا جاتا ہے جس میں تعددات کو ان کے درمیانی نقاط کے ساتھ ظاہر کیا جاتا ہے۔

درمیانی نقطہ زیریں جماعتی حدود اور بالائی جماعتی حدود کی اوسط قدر ہے۔ درمیانی نقطہ کو جماعتی نشان بھی کہا جاتا ہے۔ درمیانی نقطہ کو دیے گئے کلیہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{درمیانی نقطہ} = \frac{\text{بالائی جماعتی حد} + \text{زیریں جماعتی حد}}{2}$$



تعددی تقسیم کے لیے تعددی کثیر الاضلاع کھینچنے کے لیے درج ذیل اقدامات پر عمل کیا جاتا ہے۔

(i) x اور y- محور کھینچیں جو ایک دوسرے پر عمود ہوں۔

(ii) x- محور پر درمیانی نقاط اور y- محور پر جماعتی تعدد لیں۔

(iii) جماعتی حدود کے درمیانی نقاط کے سامنے ان کی جماعتی تعدد کے نشانات (نقاط) لگائے جاتے ہیں۔ مطلوبہ تعددی کثیر الاضلاع حاصل کرنے کے لیے تمام نقاط کو خطوطِ مستقیم کے ذریعہ ملاتے ہیں۔

(iv) آخر میں دونوں طرف خط کو دونوں کناروں پر اگلے درمیانی نقاط سے x- محور کی بنیاد تک بڑھا دیتے ہیں۔

مثال 3: 30 طلبہ نے ریاضی کے مضمون میں اپنے سالانہ امتحان میں (100 میں سے) درج ذیل نمبر حاصل کیے۔ نیچے دی گئی تعددی تقسیم کے لیے تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

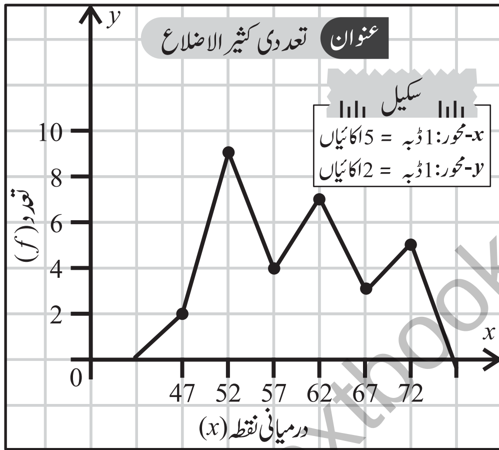
نمبرز	45 – 49	50 – 54	55 – 59	60 – 64	65 – 69	70 – 74
تعدد	2	9	4	7	3	5

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

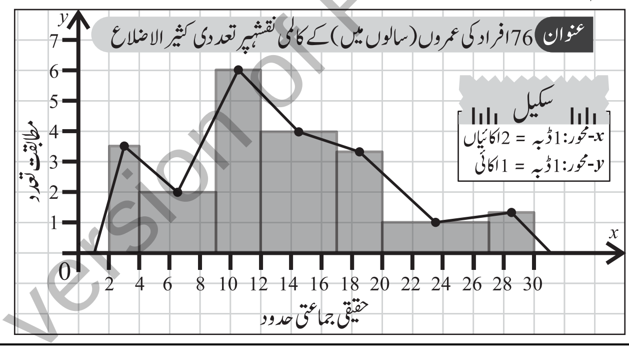
حل:

نمبرز	f	درمیانی نقطہ
45 – 49	2	$\frac{45+49}{2}=47$
50 – 54	9	$\frac{50+54}{2}=52$
55 – 59	4	$\frac{55+59}{2}=57$
60 – 64	7	$\frac{60+64}{2}=62$
65 – 69	3	$\frac{65+69}{2}=67$
70 – 74	5	$\frac{70+74}{2}=72$



یاد رکھیے!

کالمی نقشہ پر تعددی کثیر الاضلاع: کالمی نقشہ میں ہم مستطیلوں کے اوپری حصے پر درمیانی نقاط کو نشان زدہ کرتے ہیں اور تمام نقاط کو جوڑ دیتے ہیں۔ x–محور کی بنیاد کو چھونے کے لیے ہم دونوں سروں کو اگلے درمیانی نقطہ تک بڑھاتے ہیں۔ نتیجے میں گراف (مثال 2) ایک تعددی کثیر الاضلاع ہے۔



مشق نمبر 12.1

1۔ کیمسٹری کے طلبہ کے ایک گروپ نے کیمیائی لیبارٹری میں درج ذیل نمبر حاصل کیے۔

نمبرز	24 – 28	29 – 33	34 – 38	39 – 43	44 – 48	49 – 53	مجموعہ
طلبہ کی تعداد	3	6	12	23	15	6	65

درج ذیل سوالات کے جوابات دیں۔

(i) آخری جماعت کی بالائی حد کیا ہے؟

(ii) جماعتی حد (43 – 39) میں زیریں جماعتی حد کیا ہے؟

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(iii) جماعتی حد (34 – 38) کا درمیانی نقطہ کیا ہے؟

(iv) (29 – 33) اور (44 – 48) کے جماعتی تعدد کیا ہیں؟

(v) مندرجہ بالا تعددی تقسیم میں جماعتی حدود کی جسامت کیا ہے؟

(vi) کس جماعت یا گروہ میں طلبہ کی تعداد سب سے کم ہے؟

(vii) اس جماعتی حد کی زیریں جماعتی حد کیا ہے، جس کا جماعتی تعدد 15 ہے۔

(viii) اُن طلبہ کی تعداد بتائیں جنھوں نے 24 اور 43 کے درمیان نمبر حاصل کیے۔

2۔ سکول کے سٹاف کے لیے کرسیوں کی مرمت پر درج ذیل اخراجات (سینکڑوں روپوں میں) کی ضرورت ہے۔

145, 152, 153, 156, 158, 160, 146, 152, 155, 159,
161, 163, 165, 147, 148, 151, 154, 156, 158, 160,
144, 167, 151, 150, 152, 149, 145, 153, 152, 155

جماعتوں کی تعداد 8 لے کر ٹیلی نشان کے طریقہ سے ایک تعددی تقسیم کا جدول بنائیں اور آخری تین جماعتوں کے تعددات لکھیں۔

3۔ ذیل میں ایک ہائی سکول کے 30 طلبہ کے اوزان کلوگرام میں دیے گئے ہیں۔

30, 33, 24, 21, 15, 39, 37, 44, 42, 33,
33, 28, 29, 32, 31, 28, 26, 32, 34, 35,
38, 36, 41, 30, 35, 41, 23, 26, 18, 34

جماعتوں کی تعداد 6 لے کر ایک تعددی تقسیم کا جدول بنائیں اور ایک تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

4۔ دسویں جماعت کے طلبہ کے ایک گروپ نے انگریزی کے مضمون میں (100 میں سے) درج ذیل نمبر حاصل کیے۔

58, 59, 58, 33, 40, 58, 45, 46, 43, 45, 45,
50, 52, 49, 50, 57, 52, 55, 49, 50, 62, 49,
48, 44, 42, 47, 46, 47, 46, 53, 40, 44

جماعتوں کی تعداد 5 لے کر مواد کی ایک تعددی تقسیم کا جدول بنائیں۔ نیز سب سے کم تعدد والی جماعتی حد معلوم کریں اور اس مواد کا کالمی نقشہ بھی بنائیں۔

5۔ نیچے دیے گئے تعددی تقسیم کے جدول سے کالمی نقشہ پر تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

وزن (کلوگرام میں)	10 – 14	15 – 19	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39
تعدد (f)	06	17	23	30	22	13

Web version of PCTBtextbook

NOT FOR SALE-PESRP

6۔ درج ذیل میں 5 سکوں کو اچھالنے سے 50 سیٹوں کے ایک تجربے میں ہیڈ آنے کی تعداد دی گئی ہے۔ اس معلومات سے ایک غیر مسلسل تعدادی تقسیم کا جدول بنائیں۔

3, 3, 4, 0, 5, 4, 3, 3, 1, 2, 4, 5, 0, 3, 2, 4, 4, 0, 0, 0, 5, 5, 3, 2, 1
4, 3, 2, 5, 3, 2, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 1, 3, 1, 4, 3, 2, 2, 4

7۔ دسویں جماعت کے طلبہ کے ریاضی میں حاصل کردہ نمبروں کی تعدادی تقسیم درج ذیل جدول میں دی گئی ہے۔

نمبرز	35 – 37	38 – 44	45 – 54	55 – 61	62 – 67	68 – 72
تعدد	2	12	16	13	9	3

اوپر دیے گئے تعددی تقسیم کے جدول کو بذریعہ کالمی نقشہ ظاہر کریں۔

8۔ نیچے دیے گئے گروہی مواد سے کالمی نقشہ پر تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

جماعتی حدود	5 – 8	8 – 12	12 – 20	20 – 25	25 – 27	27 – 32
تعدد (f)	2	12	25	32	14	5

12.2 مرکزی رجحان کی پیمائش (Measures of Location (Central Tendency))

وہ پیمانہ جو مواد کا مرکز دیتا ہے۔ مرکزی رُجحان کا پیمانہ کہلاتا ہے۔ مواد کی درمیانی یا مرکزی قدر معلوم کرنے کے لیے مرکزی رُجحان کی پیمائش کا استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم پڑھ چکے ہیں کہ مواد کو ایک جامع شکل میں تعددی تقسیم کے ذریعے جب پیش کیا گیا تو معلومات کے بارے میں با آسانی سمجھ لیا گیا۔ مواد میں دی گئی معلومات کو ہم مزید مختصر طریقہ سے صرف ایک نمائندہ قدر کے ذریعے پیش کر سکتے ہیں۔ یہ مواد کے ارد گرد تقریباً مرکزی قیمت ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ہم عام طور پر اس طرح کے جملے استعمال کرتے ہیں۔

(i) حسن روزانہ 6 گھنٹے مطالعہ کرتا ہے۔ (ii) عائشہ کے گھر کا ماہانہ خرچ پچاس ہزار روپے ہے۔

(iii) ماہم کی گاڑی کی رفتار 72 کلو میٹر فی گھنٹا ہے۔ (iv) کسی ملک کی فی کس سالانہ آمدنی 70,000 روپے ہے۔

(v) بازار میں پیاز کی قیمت 150 روپے فی کلو گرام ہے۔ وغیرہ

پہلے جملے پر غور کریں تو معلوم ہو گا کہ حسن ٹھیک 6 گھنٹے روزانہ مطالعہ نہیں کرتا بلکہ وہ کبھی 6 گھنٹے سے زیادہ اور کبھی اس سے کم مطالعہ کرتا ہے۔ لیکن پھر بھی ہم یوں بیان کیوں دیتے ہیں کہ وہ 6 گھنٹے روزانہ مطالعہ کرتا ہے؟ وہ چونکہ 6 گھنٹے کے قریب روزانہ مطالعہ کرتا ہے۔ اس لیے اس کے مطالعہ کے اوقات میں 6 گھنٹے کو ایک خاص حیثیت حاصل ہو گئی ہے۔ جسے ہم اوسط کہتے ہیں۔ اس اوسط کو مرکزی رجحان کا پیمانہ بھی کہا جاتا ہے۔ کیونکہ یہ روزانہ مطالعہ کے اوقات کی نمائندہ قدر ہے۔ اسی طرح باقی سارے بیانات بھی ایک طرح کی نمائندہ قدریں ہیں۔ چونکہ ہر بیان مرکز کے رجحان کو ظاہر کرتا ہے۔ اس لیے ہم اسے ”مرکزی رجحان کی پیمائش“ بھی کہتے ہیں۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

درج ذیل مرکزی رجحان کے پیمانوں کی وضاحت اس حصہ میں کی جائے گی۔

(i) حسابی اوسط (ii) وسطانیہ (iii) عادہ (iv) اوزانی اوسط

12.2.1 حسابی اوسط (Arithmetic mean)

اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ متغیر کی وہ قیمت جو تمام مدات کے مجموعہ کو مدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ پس ایک سلسلہ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ میں حسابی اوسط کو $\overline{X}$ (جسے x-بار پڑھا جاتا ہے) سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے یوں معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\Sigma x}{n}$$ (براہ راست کلیہ)

یہاں Σ علامت مجموعہ کو ظاہر کرتی ہے اور n مدات کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 4: ایک طالب علم کے پانچ امتحانات میں نمبر 64، 75، 81، 87، 90 تھے۔ نمبروں کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

حل:

$$\text{A.M.} = \overline{X} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{64 + 75 + 81 + 87 + 90}{5}$$

$$\overline{X} = \frac{397}{5} = 79.4$$ نمبر

> **خود آزمائی!**
> 10، 30، 40، x، 67، 81 کی اوسط 50 ہے۔ x کی قیمت معلوم کریں۔

مثال 5: ایک حکومت ایک سکول کے نیچے دیے گئے پانچ شعبوں کے لیے 200,000 روپے کے فنڈز مختص کرتی ہے

(i) سکول لائبریری : 35,000 روپے

(ii) کھیل کی سہولیات : 25,000 روپے

(iii) پارکنگ کی جگہ : 40,000 روپے

(iv) کمروں کی مرمت : 45,000 روپے

(v) فرنیچر : 55,000 روپے

سکول کے ہر شعبے میں فنڈز مختص کرنے کی اوسط معلوم کریں۔

> **خود آزمائی!**
> 15 مدات کی اوسط 50 ہے۔ دوبارہ چیک کرنے پر پتہ چلا کہ ایک عدد 52 کی بجائے 25 غلطی سے لکھا گیا ہے۔ صحیح اوسط معلوم کریں۔

حل: ہر شعبے کی اوسط معلوم کرنے کے لیے ہم دیے گئے مواد کی اوسط معلوم کریں گے۔

$$\overline{X} = \frac{35,000 + 25,000 + 40,000 + 45,000 + 55,000}{5}$$

$$\overline{X} = \frac{200,000}{5}$$

$$\overline{X} = 40,000$$ روپے

اوسطاً ہر شعبہ 40,000 روپے کے فنڈز لیتا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

گروہی مواد سے حسابی اوسط نکالنے کا طریقہ

فرض کیا $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ جماعتی حدود کے درمیانی نقاط ہیں۔ ان جماعتی حدود کا تعدد $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ہے اب حسابی اوسط نکالنے کے لیے ہم f اور x کی متناظرہ قیمتوں کے حاصل ضرب کے مجموعہ کو ان کے تعددات کے مجموعہ پر تقسیم کرکے معلوم کرتے ہیں۔

$$\overline{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots\cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

مثال 6: ایک امتحان میں 100 طلبہ کے حاصل کردہ نمبرز (100 میں سے) دیے گئے ہیں۔ ان کے نمبروں کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

نمبرز	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60
طلبہ کی تعداد	14	16	18	23	18	11

حل:

نمبرز	درمیانی نقطہ (x)	تعدد (f)	fx
30 – 35	32.5	14	455.0
35 – 40	37.5	16	600.0
40 – 45	42.5	18	765.0
45 – 50	47.5	23	1092.5
50 – 55	52.5	18	945.0
55 – 60	57.5	11	632.5
مجموعہ	—	$\Sigma = 100$	$\Sigma fx = 4490$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{4490}{100}$$

یا $\overline{X} = 44.9$ نمبرز

پس طلبہ کے اوسط نمبر 44.9 ہیں۔

حسابی اوسط نکالنے کا مختصر طریقہ

اس میں کوئی شک نہیں کہ x اور f کی تمام چھوٹی مقداروں کے لیے حسابی اوسط سیدھے طریقہ سے نکالنا مواد غیر گروہی ہو یا گروہی ہو آسان ہوتا ہے۔ لیکن جب x اور f کی تمام قیمتیں کافی بڑی ہوں تو سوال حل کرنا قدرے مشکل ہو جاتا ہے سوال کو کم وقت میں اور آسانی سے حل کرنے کے لیے ہم سلسلہ کی اکائیوں کا فرضی اوسط سے انحراف لیتے ہیں۔ فرض کریں A فرضی اوسط ہے۔ (x کی قیمتوں میں سے کوئی بھی اکائی ہو سکتی ہے) اور سلسلہ اکائیوں کو A سے انحراف کو D سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یعنی $D = x - A$،

Web version of PCTB textbook
NOT FOR SALE-PESRP

$x = D + A$ کے لیے حسابی اوسط کا کلیہ بن جاتا ہے:

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma D}{n}$$ غیر گروہی مواد کے لیے ...(i)

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fD}{\Sigma f}$$ گروہی مواد کے لیے ...(ii)

خود آزمائی!

اگر $\overline{X} = 120$، $A = 85$ اور $n = 25$ ہو تو کیا آپ ΣD کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں؟

مثال 7: ایک بلے باز نے درج ذیل دوڑیں بنائیں۔ دیے ہوئے مواد کا حسابی اوسط مختصر کلیہ کی مدد سے معلوم کریں۔

دوڑیں: 40, 45, 50, 52, 50, 60, 56, 70

حل: فرضی اوسط $(A = 52)$ سے انحراف نکالتے ہیں۔

x	40	45	50	52	50	60	56	70
D = x – A	–12	–7	–2	0	–2	8	4	18

اب $\Sigma D = -23 + 30 = 7$

چوں کہ $\overline{X} = A + \frac{\Sigma D}{n}$

اس لیے $\overline{X} = 52 + \frac{7}{8}$

$= 52 + 0.875 = 52.88$ یا 53 دوڑیں

مثال 8: درج ذیل میں 12.5 میں سے 10 مختلف انحرافات دیے گئے ہیں۔ حسابی اوسط معلوم کریں۔

6, –2, 3.5, 9, 8.7, –5.5, 14, 11.3, –6.8, –4.2

حل: 12.5 سے انحرافات:

6, –2, 3.5, 9, 8.7, –5.5, 14, 11.3, –6.8, –4.2

اب $\Sigma D = 34$، نیز $A = 12.5$، ہمارے پاس موجود کلیے کا استعمال کرتے ہوئے:

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma D}{n}$$

$$= 12.5 + \frac{34}{10}$$

یا $\overline{X} = 12.5 + 3.4 = 15.9$

مثال 9: درج ذیل تعددی تقسیم میں سکول کے 200 لڑکوں کے قد (انچوں میں) ریکارڈ کیے گئے ہیں۔ مختصر طریقہ سے لڑکوں کا اوسط قد معلوم کریں۔

قد(x)(انچوں میں)	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
تعدد (f)	2	5	8	24	55	45	38	16	6	1

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

قد(x)(انچوں میں)	تعداد (f)	$A = 55$ $D = x - A$	fD
51	2	−4	−8
52	5	−3	−15
53	8	−2	−16
54	24	−1	−24
$A \leftarrow 55$	55	0	0
56	45	1	45
57	38	2	76
58	16	3	48
59	6	4	24
60	1	5	5
مجموعہ	$\Sigma f = 200$		$\Sigma fD = 135$

Web version of PCTB textbook

اب، کلیہ (ii) کا استعمال کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fD}{\Sigma f}$$

$$\overline{X} = 55 + \frac{135}{200}$$

یا $\overline{X} = 55 + 0.675$

پس $\overline{X} = 55.68$ تقریباً انچ

لہٰذا طلبہ کا اوسط قد 55.68 انچ ہے۔

مثال 10: ایک اچھی شہرت کے حامل سکول سے 10 طلبہ پانچویں جماعت کے فریق A اور 10 طلبہ فریق B سے لیے گئے۔ اِن کے اوزان کلوگرام میں پیمائش کیے گئے اور اِنہیں درج ذیل تفصیل میں ریکارڈ کیا گیا۔

اوزان (کلوگرام میں) فریق A	30	28	32	29.5	35	34	31	33	40	37.5
اوزان (کلوگرام میں) فریق B	35	31.5	34.5	35	32.8	38	29.5	36	36.5	34

(i) فریق A اور فریق B کے لیے اوسط اوزان معلوم کریں۔

(ii) نتیجہ اخذ کریں کہ کون سا فریق اوسطاً زیادہ بہتر ہے؟

NOT FOR SALE-PESRP

$X_{(A)}$	$X_{(B)}$
30	35
28	31.5
32	34.5
29.5	35
35	32.8
34	38
31	29.5
33	36
40	36.5
37.5	34
$\Sigma X_{(A)} = 330$	$\Sigma X_{(B)} = 342.8$

حل: (i) ہم دونوں فریقوں کے لیے حسابی اوسط براہ راست طریقہ سے معلوم کرتے ہیں۔(کوئی بھی طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے)۔

جیسا کہ مدات کی تعداد $n = 10$

اور $\overline{X}_{(A)} = \dfrac{\Sigma X_{(A)}}{n}$

پس $\overline{X}_{(A)} = \dfrac{330}{10} = 33$ کلوگرام

اور $\overline{X}_{(B)} = \dfrac{\Sigma X_{(B)}}{n}$

پس $\overline{X}_{(B)} = \dfrac{342.8}{10} = 34.28$ کلوگرام

(ii) نتائج سے ہم نے دیکھا کہ $\overline{X}_{(B)}$ کا جواب $\overline{X}_{(A)}$ سے بڑا ہے۔اِس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ فریق B اوسطاً بہتر ہے۔

12.2.2 وسطانیہ (Median)

وسطانیہ ترتیب شدہ (صعودی یا نزولی ترتیب) مواد کی بالکل درمیانی قدر ہوتی ہے۔وسطانیہ وہ قدر ہے جو مواد کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کردے۔یعنی مواد کا 50 فی صد وسطانی قدر سے پہلے اور 50 فی صد وسطانی قدر کے بعد ہوتا ہے۔وسطانیہ کو $\tilde{X}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے وسطانیہ

n مدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کا وسطانیہ اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

وسطانیہ $(\tilde{X}) = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ ویں قدر (جب n طاق عدد ہو)

وسطانیہ $(\tilde{X}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{2}\right.$ ویں قدر $+ \left(\dfrac{n+2}{2}\right)$ ویں قدر$\left.\right)$ (جب n جفت عدد ہو)

مثال 11: کرکٹ کے ایک کھلاڑی نے درج ذیل دوڑیں بنائیں۔

8, 12, 18, 13, 16, 5, 20 دوڑوں کا وسطانیہ معلوم کریں۔

حل: دوڑوں کو ترتیب صعودی میں لکھیں۔ <u>5, 8, 12,</u> 13, <u>16, 18, 20</u>

چوں کہ $n = 7$ طاق ہے اِس لیے وسطانیہ $(\tilde{X}) = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ ویں قدر

$= \left(\dfrac{7+1}{2}\right)$ ویں قدر $=$ چوتھی قدر $= 13$

پس دیے گئے مواد کا وسطانیہ 13 ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

مثال12: 10 طلبہ نے انگریزی میں (100 میں سے) درج ذیل نمبر حاصل کیے:

23, 15, 35, 48, 41, 5, 8, 9, 11, 51 اِس مواد کا وسطانیہ معلوم کریں۔

حل: مواد کو ترتیب صعودی میں لکھیں۔

5, 8, 9, 11, 15, 23, 35, 41, 48, 51

چوں کہ $n = 10$ جفت ہے اِس لیے

$$\text{وسطانیہ } (\tilde{X}) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} \text{ ویں قدر} + \left(\frac{n+2}{2}\right)\text{ویں قدر}\right)$$

$$\text{جیسا کہ } \frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{اور} \quad \frac{n+2}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{وسطانیہ} = \frac{1}{2}(\text{5 ویں قدر} + \text{6 ویں قدر})$$

$$\because \quad \text{وسطانیہ} = \frac{1}{2}[15 + 23] = \frac{38}{2} = 19$$

پس مواد کا وسطانیہ 19 ہے۔

گروہی مواد کے لیے وسطانیہ

گروہی مواد کے لیے وسطانیہ درج ذیل کلیہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{وسطانیہ} = (\tilde{X}) = \ell + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

جب کہ

$\ell =$ وسطانی جماعت کی حقیقی زیریں جماعتی حد ہے۔

$h =$ وسطانی جماعت کی جماعتی حدود کی جسامت ہے۔

$f =$ وسطانی جماعت کا تعدد ہے۔

$n =$ تعدد کا مجموعہ یعنی Σf ہے۔

$c =$ وسطانی جماعت سے پہلی جماعت کا مجموعی تعدد ہے۔

درج ذیل نکات کو یاد رکھیں:

(i) جماعتیں ایک مسلسل سلسلہ میں ہونی چاہیں۔ یعنی ہمیں حقیقی جماعتی حدود کی ضرورت ہوتی ہے۔

(ii) تعددی کالم سے مجموعی تعدد ($c.f$) کا کالم مرتب کریں۔

(iii) $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں قدر کی قیمت نکالنے کے بعد اِسے ہم مجموعی تعدد ($c.f$) کے کالم میں جہاں کہیں بھی یہ آتا ہے دیکھیں اور وسطانی جماعت کا تعین کریں۔

(iv) وسطانی جماعت کی نشان دہی کریں۔ پھر اِس وسطانی جماعت سے f اور h کی قیمتیں لیں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مثال13: 100 کھلاڑیوں کے قد تقریباً (انچوں میں) درج ذیل جدول میں دیے گئے ہیں۔ وسطانیہ معلوم کریں۔

قد (انچوں میں)	62.5–63.5	63.5–64.5	64.5–65.5	65.5–66.5	66.5–67.5	67.5–68.5	68.5–69.5	69.5–70.5	70.5–71.5
طلبہ کی تعداد	4	6	10	20	30	13	12	3	2

حل: اِس گروہی مواد میں حقیقی جماعتی حدود پہلے ہی دی گئی ہیں۔

قد (انچوں میں)	تعدد (f)	مجموعی تعدد $(c.f.)$	
62.5 – 63.5	4	4	
63.5 – 64.5	6	6 + 4 = 10	
64.5 – 65.5	10	10 + 10 = 20	
65.5 – 66.5	20	20 + 20 = 40 → c	
66.5 – 67.5	30	30 + 40 = 70 ⟶	وسطانی جماعت
67.5 – 68.5	13	13 + 70 = 83	
68.5 – 69.5	12	12 + 83 = 95	
69.5 – 70.5	3	3 + 95 = 98	
70.5 – 71.5	2	2 + 98 = 100 → n	
مجموعہ	$\Sigma f = 100$	---	

یہاں $n = 100$

لہٰذا $\dfrac{n}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$

50ویں قدر 67.5 — 66.5 حقیقی جماعت میں ہے۔

$$c = 40, f = 30, h = 1, \ell = 66.5$$

چوں کہ
$$\text{وسطانیہ} = \ell + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

قیمتیں درج کرنے سے
$$= 66.5 + \frac{1}{30}(50 - 40)$$
$$= 66.5 + \frac{10}{30}$$
$$= 66.5 + 0.33$$

وسطانیہ = 66.83 انچ

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

مثال14: درج ذیل میں 50 آدمیوں کے اوزان (کلوگرام) میں دیے گئے ہیں۔ اوزان کا وسطانیہ معلوم کریں۔

اوزان (کلوگرام میں)	110 – 114	115 – 119	120 – 124	125 – 129	130 – 134
آدمیوں کی تعداد (f)	5	12	23	6	4

حل: اِس گروہی مواد میں حقیقی جماعتی حدود نہیں دی گئی ہیں۔ اِس لیے سب سے پہلے حقیقی جماعتی حدود معلوم کرتے ہیں۔

اوزان (کلوگرام میں)	تعدد (f)	حقیقی جماعتی تعدد	مجموعی تعدد (c.f.)	
110 – 114	5	109.5 – 114.5	5	
115 – 119	12	114.5 – 119.5	$17 \rightarrow c$	
120 – 124	23	119.5 – 124.5	$40 \rightarrow$	وسطانی جماعت
125 – 129	6	124.5 – 129.5	46	
130 – 134	4	129.5 – 134.5	$50 \rightarrow n$	
مجموعہ	$\Sigma f = 50$	---	---	

یہاں $n = 50$ لہٰذا $\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$، 25ویں قدر حقیقی جماعتی حدود (119.5 – 124.5) میں شامل ہے۔

$$\ell = 119.5,\ h = 5,\ f = 23,\ c = 17$$

$$\text{وسطانیہ} = \ell + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$= 119.5 + \frac{5}{23}(25 - 17) \quad \text{(قیمتیں درج کرنے سے)}$$

$$= 119.5 + \frac{40}{23} = 119.5 + 1.74$$

پس وسطانیہ = 121.24 کلوگرام

12.2.3 عادہ (Mode)

کسی سلسلہ یا مواد میں وہ قیمت جو سب سے زیادہ مرتبہ آئے عادہ کہلاتی ہے۔ یہ سب سے عام قدر ہوتی ہے۔ عادہ کو $\hat{X}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے عادہ (Mode for Ungrouped Data)

مثال15: جمال کے ریاضی میں 8 ماہانہ ٹیسٹوں میں حاصل کردہ نمبر 75,76,80,80,82,82,82,85 تھے۔ حاصل کردہ نمبروں کا عادہ معلوم کریں۔

حل: چوں کہ مواد میں 82 سب سے زیادہ مرتبہ یعنی تین بار آیا ہے۔ پس عادہ 82 ہے۔

مثال16: 10 طلبہ سے پوچھا گیا کہ اُنہوں نے پچھلے ہفتے کُل 20 سوالات میں سے کتنے سوالات حل کیے۔ ریکارڈ کیے گئے سوالات کے حل کی تعداد 17 ,18 ,20 ,19 ,10 ,16 ,11 ,15 ,14 ,13 تھی۔ مواد کا عادہ معلوم کریں۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

حل: یہ واضح ہے مواد میں کوئی بھی مد ایک مرتبہ سے زیادہ نہیں آئی۔ لہٰذا اِس مواد کا کوئی عادہ نہیں ہے۔ بعض اوقات مواد میں ایک سے زیادہ عادہ بھی ہو سکتے ہیں۔ اگر مواد 32, 25, 20, 20, 20, 15, 15, 15, 10 ہو تو اِس میں عادہ کی دو قیمتیں ہیں یعنی 15 اور 20۔

مثال 17: ایک سکول کے 15 طلبہ سے ایک سروے کیا گیا اور طلبہ سے اُن کے پسندیدہ رنگ کے بارے میں پوچھا گیا۔ جوابات یہ ہیں: جامنی، پیلا، جامنی، پیلا، پیلا، سُرخ، نیلا، سبز، پیلا، پیلا، سُرخ، نیلا، پیلا، جامنی، سبز۔ مواد کا عادہ معلوم کریں۔

حل: عادہ سب سے زیادہ مرتبہ آنے والا رنگ ہے۔

پیلا رنگ = عادہ

لہٰذا "پیلا رنگ" دیے گئے مواد کا عادہ ہے۔

یاد رکھیے!
مواد میں ایک سے زیادہ عادہ ہو سکتے ہیں۔ ایک مواد میں عادہ ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہو سکتا۔

گروہی مواد کے لیے عادہ

عادہ درج ذیل کلیہ کی مدد سے نکال سکتے ہیں۔

$$\text{عادہ} = \ell + \frac{(f_m - f_1)}{(f_m - f_1)(f_m - f_2)} \times h$$

جب کہ: ℓ = عادہ جماعت کی حقیقی زیریں حد ہے۔

f = عادہ جماعت کا تعدد

f_1 = عادہ جماعت سے پہلے والی جماعت کا تعدد

f_2 = عادہ جماعت کے بعد آنے والی جماعت کا تعدد

h = عادہ جماعت میں جماعتی حدود کی جسامت

نوٹ!
تعددی تقسیم میں دیے گئے مواد کی مدد سے عادہ آسانی سے معلوم نہیں کیا جاسکتا۔ کیوں کہ اس میں اکیلی قیمت نہیں ہوتی۔ اس لیے ہم پہچان نہیں سکتے کہ کونسی قیمت سب سے زیادہ بار آئی ہے۔ ہم صرف سب سے زیادہ تعدد والی جماعت کو عادہ جماعت کے طور پر فرض کرتے ہیں۔

مثال 18: درج ذیل آٹھویں جماعت کے 40 طلبہ کے قد (انچوں میں) دیے گئے ہیں۔ مواد کا عادہ معلوم کریں۔

قد (انچوں میں)	48 – 50	50 – 52	52 – 54	54 – 56	56 – 58	58 – 60
طلبہ کی تعداد	5	7	10	9	6	3

قد (انچوں میں)	تعدد (f)
48 – 50	5
50 – 52	$7 \rightarrow f_1$
52 – 54	$10 \rightarrow f_m$
54 – 56	$9 \rightarrow f_2$
56 – 58	6
58 – 60	3
مجموعہ	$\Sigma f = 40$

سرگرمی
50 طلبہ کے وزن کا مواد اِکٹھا کریں۔ اس کی تعددی تقسیم بنائیں اور دیے ہوئے مواد سے اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل: اِس مواد میں حقیقی جماعتی حدود پہلے ہی دی گئی ہیں۔ عادہ معلوم کرنے کے لیے گروہی مواد کا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\ell = 52,\ h = 2,\ f_m = 10,\ f_1 = 7,\ f_2 = 9$$

$$\text{عادہ} = \ell + \frac{(f_m - f_1) \times h}{(f_m - f_1) + (f_m - f_2)}$$

یا
$$\text{عادہ} = 52 + \frac{(10-7) \times 2}{(10-7) + (10-9)}$$

یا
$$\text{عادہ} = 52 + \frac{3 \times 2}{3+1} = 52 + \frac{6}{4}$$

یا
$$\text{عادہ} = 52 + 1.5 = 53.5\ \text{انچ}$$

سرگرمی

پہلے 20 مکمل اعداد کے اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

12.2.4 اوزانی اوسط (Weighted Mean)

حسابی اوسط کو اُس وقت استعمال کیا جاتا ہے۔ جب تمام قدروں کو یکساں اہمیت / وزن دیا جاتا ہے۔ لیکن بعض حالات ایسے ہوتے ہیں جن میں مختلف قدروں کو مختلف اوزان دیے جاتے ہیں۔ اس صورت حال میں اوزانی اوسط کو ترجیح دی جاتی ہے۔ اسے $\overline{X}_w$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ کی اوزانی اوسط اِس کے متعلقہ اوزان $W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n$ کے ساتھ اِس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\overline{X}_w = \frac{W_1X_1 + W_2X_2 + W_3X_3 + \cdots + W_nX_n}{W_1 + W_2 + W_3 + \cdots W_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_iX_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} = \frac{\sum WX}{\sum W}$$

مثال 19: درج ذیل مواد ایک طالب علم کے مختلف مضامین میں نمبروں کی وضاحت کرتا ہے اور اِن مضامین کے تفویض کردہ اوزان بھی دیے گئے ہیں۔

نمبرز (X)	74	78	74	90
اوزان (W)	4	3	5	6

اِس کا اوزانی اوسط معلوم کریں۔

حل:

$$\text{اوزانی اوسط}\left(\overline{X}_w\right) = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$$

$$\overline{X}_w = \frac{4(74) + 3(78) + 5(74) + 6(90)}{4+3+5+6}$$

$$= \frac{296 + 234 + 370 + 540}{18} = \frac{1440}{18}$$

$$\overline{X}_w = 80$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال20: ایک دواساز کمپنی نے شہر کے سات مختلف علاقوں میں دوائی کے نمونے کی مارکیٹنگ شروع کی۔ کمپنی نے دوا کے پیکٹ شہر کے ہر علاقہ میں تقسیم کیے اور ہر علاقے کی مانگ کے مطابق دوائی تقسیم کی گئی۔ دیے گئے مواد کا حسابی اوسط اور اوزانی اوسط معلوم کریں۔

اوزان (کلوگرام میں)	پیکٹوں کی تعداد	شہر کے علاقے
5	15	A
4	25	B
3	18	C
4	23	D
2	15	E
1	10	F
2	8	G

حل:

$$\text{حسابی اوسط} = \frac{\Sigma X}{n}$$

$$= \frac{15 + 25 + 18 + 23 + 15 + 10 + 8}{7}$$

$$= \frac{114}{7} = 16.29 \approx 16 \text{ پیکٹ}$$

لہٰذا کمپنی کی طرف سے ہر علاقے میں تقسیم کی جانے والی دوائی کے پیکٹوں کی اوسط تعداد 16 پیکٹ ہے۔

$$\text{اوزانی اوسط} = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$$

$$= \frac{15(5)+25(4)+18(3)+23(4)+15(2)+10(1)+8(2)}{5+4+3+4+2+1+2}$$

$$= \frac{377}{21} = 17.95 \approx 18$$

12.2.5 حسابی اوسط، اوزانی اوسط، وسطانیہ اور عادہ کا روزمرہ زندگی میں استعمال

فروخت اور ترسیل (Sales and Marketing)

مثال 21: ایک کھلونا بنانے والی فیکٹری نے ایک مہینے میں جتنے کھلونے فروخت کیے۔ درج ذیل مواد پر غور کریں۔

جماعتی حدود	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
f	15	28	45	29	20

(i) فیکٹری سے فروخت کیے گئے کھلونوں کی تعداد کا حسابی اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

(ii) نیز اِس جدول کی عادہ جماعت بھی بتائیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

حل: (i) حسابی اوسط کے لیے

جماعتی حدود	f	X	fX	مجموعی تعدد (c.f.)	
10 – 20	15	15	225	15	
20 – 30	28	25	700	28 + 15 = 43	
30 – 40	45	35	1575	45 + 43 = 88	عادہ/ وسطانی جماعت
40 – 50	29	45	1305	29 + 88 = 117	
50 – 60	20	55	1100	20 + 117 = 137	
مجموعہ	**$\Sigma f = 137$**		**4905**		

اوسط $\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{4905}{137} = 35.8 \approx 36$

کھلونوں کی اوسط فروخت 36 ہے۔

وسطانیہ کے لیے:

یہاں $n = 137$ ، $\dfrac{n}{2} = \dfrac{137}{2} = 68.5$ ؛ 68.5 موجود ہے جماعتی حدود (30 – 40) میں

$\ell = 30,\ h = 10,\ f = 45,\ c = 43$

$$\text{وسطانیہ}(\tilde{X}) = \ell + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$= 30 + \frac{10}{45}\left(\frac{137}{2} - 43\right)$$

$$= 30 + \frac{10}{45}(68.5 - 43)$$

$$= 30 + \frac{10}{45}(25.5)$$

$$= 30 + 5.67$$

$$\text{وسطانیہ} = 35.67 \approx 36$$

پس فیکٹری کی طرف سے فروخت کیے گئے کھلونوں کا وسطانیہ 36 ہے۔

عادہ کے لیے: $\ell = 30,\ h = 10,\ f_m = 45,\ f_1 = 28,\ f_2 = 29$

$$\text{عادہ}(\hat{X}) = \ell + \frac{(f_m - f_1)}{(f_m - f_1) + (f_m - f_2)} \times h$$

$$= 30 + \frac{(45 - 28)}{(45 - 28) + (45 - 29)} \times 10$$

NOT FOR SALE-PESRP

$$= 30 + \frac{(45-28)}{(45-28)+(45-29)} \times 10$$

$$= 30 + \frac{17}{17+16} \times 10$$

$$= 30 + \frac{17}{33} \times 10$$

$$= 30 + 5.15$$

عادہ $(\hat{X}) = 35.15 \approx 35$

پس فیکٹری کی طرف سے فروخت کیے گئے کھلونوں کا عادہ 35 ہے۔

(ii) فیکٹری کی طرف سے فروخت کیے گئے کھلونوں کی ماڈل کلاس (40 – 30) ہے۔

مشق 12.2

1۔ درج ذیل میں ہر ایک کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

(i) 4, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 28, 30. (ii) 12, 18 19, 0, –19, –18, –12

(iii) 6.5, 11, 12.3, 9, 8.1, 16, 18, 20.5, 25 (iv) 8, 10, 12, 14, 16, 20, 22

2۔ درج ذیل میں 12 طلبہ کے قد (انچوں میں) ہیں۔ وسطانی قد معلوم کریں۔

55, 53, 54, 58, 60, 61, 62, 56, 57, 52, 51, 63 مواد کا وسطانیہ معلوم کریں۔

3۔ درج ذیل میں 10 مزدوروں کی اُجرتیں (روپوں میں) ہیں۔

88, 70, 72, 125, 115, 95, 81, 90, 95, 90

(i) حسابی اوسط (ii) وسطانیہ (iii) عادہ معلوم کریں۔

4۔ درج ذیل انگریزی مضمون میں طلبہ کے حاصل کردہ نمبر دیے گئے ہیں:

حاصل کردہ نمبر	15 – 19	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39
تعدد	9	18	35	17	5

(i) ان نمبروں کا حسابی اوسط (براہ راست اور مختصر طریقہ سے) (ii) اِن نمبروں کا وسطانیہ معلوم کریں۔

5۔ درج ذیل تعددی تقسیم دی گئی ہے اس تعددی تقسیم کا عادہ معلوم کریں۔

جماعتی حدود	5 – 9	10 – 14	15 – 19	20 – 24	25 – 29
تعدد	1	8	18	11	2

6۔ 10 نوجوان لڑکے ایک پٹرول پمپ سٹیشن پر کام کرتے ہیں۔ اِن کی ہفتہ وار اُجرتیں درج ذیل ہیں۔

اُجرتیں (روپوں میں): 4250, 4350, 4400, 4250, 4350, 4410,4500, 4300, 4500, 4390.

اُجرتوں کا حسابی اوسط مختصر کلیے سے، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

7۔ 45 مدات کا حسابی اوسط 80 ہے۔ اِن کا مجموعہ معلوم کریں۔

8۔ پانچ مدات اِس طرح ہیں: 1, 4, 0, 7, 9 اِن کا حسابی اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

9۔ مواد کے ایک سیٹ میں درج ذیل قیمتیں ہیں۔

148, 145, 160. 157, 156, 160

ثابت کریں کہ حسابی اوسط > وسطانیہ > عادہ

10۔ ایک ہوسٹل میں 10 طلبہ کے دوپہر کے کھانے کی ماہانہ حاضریوں کا ریکارڈ کچھ اِس طرح ہے۔

21, 15, 16, 18, 14, 17, 15, 12, 13, 11

حاضریوں کا وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں اگر $D = A - 20$ فرض کریں تو حسابی اوسط بھی معلوم کریں۔

11۔ تقسیمِ انعامات کے دِن 50 طلبہ کے لائے ہوئے جیب خرچ کی تفصیل درج ذیل جدول میں دی گئی ہے۔

روپے	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
تعدد (f)	12	9	18	7	4

(i) درج بالا مواد کا وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

(ii) دیے گئے مواد کا حسابی اوسط مختصر طریقہ سے معلوم کریں۔

12۔ 20 لڑکوں کی عمروں کا حسابی اوسط 13 سال 4 ماہ اور 5 دِن ہے۔ اِن کی عمروں کا مجموعہ معلوم کریں۔
اگر ان میں سے ایک لڑکے کی عمر 15 سال ہو تو باقی لڑکوں کی اوسط عمر کیا ہے؟

13۔ درج ذیل معلومات سے حسابی اوسط معلوم کریں۔

(i) اگر $D = X - 140$ ، $\Sigma D = 500$ اور $n = 10$ ہو

(ii) اگر $U = \dfrac{x-130}{6}$ ، $\Sigma U = -150$ اور $n = 15$ ہو

(iii) اگر $D = X - 25$ ، $\Sigma fD = 300$ اور $\Sigma f = 20$ ہو

(iv) اگر $U = \dfrac{x-120}{5}$ ، $\Sigma fU = 60$ اور $\Sigma f = 100$ ہو

14۔ سکول میں اساتذہ کے ایک گروپ نے ایک کرکٹ میچ منعقد کیا جس میں تین بچوں حارث، ماہم اور منال نے درج ذیل دوڑیں بنائیں۔

حارث کی دوڑیں	50	55	70	85	90
ماہم کی دوڑیں	75	60	60	45	53
منال کی دوڑیں	80	77	66	42	48

یہ فیصلہ کیا گیا ہے کہ جو بچہ سب سے زیادہ اوسطاً دوڑیں بنائے گا اُسے 1000 روپے انعام میں دیے جائیں گے۔ انعام کی رقم کون حاصل کرے گا؟

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

15۔ نیچے دیا گیا ایک تعددی تقسیم کا جدول ہے۔ جسے انحرافات $D = X - 20$ سے بنایا گیا ہے۔ اِس مواد سے حسابی اوسط معلوم کریں۔

D	−6	−4	−2	0	2	4	6
f	1	3	6	20	26	12	2

16۔ ایک معلومات عامہ کے پروگرام میں دو ساتھیوں حفصہ اور فاطمہ نے حصّہ لیا اور اِنہوں نے درج ذیل پوائنٹس حاصل کیے:

45, 51, 58, 61, 74. 48, 46, 50

اوسط پوائنٹس بذریعہ انحراف $D = x - 58$ معلوم کریں۔

17۔ ایک شخص نے درج ذیل کھانے کی اشیا خریدیں:

کھانے کی اشیا	مقدار (کلو گرام میں)	لاگت فی کلو گرام (روپوں میں
چاول	10	96
آٹا	12	48
گھی	4	190
چینی	3	49
گوشت	2	650

کھانے والی اشیا کا اوزانی اوسط فی کلو گرام کیا ہے؟

18۔ نیچے دیے گئے مواد کا اوزانی اوسط معلوم کریں۔

اشیا	مقدار	اشیا کی لاگت (ہزاروں میں)
واشنگ مشین	5	35
ہیٹر	3	5
چولہا	2	13
ڈسپنسر	6	18

19۔ ایک کمپنی اپنے اگلے سال کے مارکیٹنگ بجٹ کی منصوبہ بندی پانچ سالوں میں کر رہی ہے۔ سالانہ بجٹ (ملین میں) 5, 7, 8, 6, 7 ہیں۔ اگلے سال کا اوسط بجٹ معلوم کریں۔

20۔ احمد نے ایک مخصوص امتحان میں درج ذیل نمبر حاصل کیے۔

کمپیوٹر	اسلامیات	ریاضی	سائنس	انگلش	اُردو
72	85	90	80	65	78

اگر مضامین کو بالترتیب 4, 2, 3, 2, 4, 5 وزن دیا گیا ہو تو اِن کا اوزانی اوسط معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

جائزہ مشق 12

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) کون سا مواد صرف مخصوص اقدار لیتا ہے؟

(a) مسلسل مواد (b) غیر مسلسل مواد (c) گروہی مواد (d) غیر گروہی مواد

(ii) مواد میں کسی قدر کے وقوع پذیر ہونے کی تعداد کو کہا جاتا ہے۔

(a) تعدد (b) متوقع تعدد (c) جماعتی حد (d) حقیقی جماعتی حد

(iii) درمیانی نقطہ جانا جاتا ہے۔

(a) حسابی اوسط (b) وسطانیہ (c) جماعتی حد (d) جماعتی نشان

(iv) تعددی کثیر الاضلاع کو استعمال کرتے ہوئے بنایا جاتا ہے:

(a) کالمی نقشہ (b) بار گراف (c) حقیقی جماعتی حدود (d) سعت

(v) سب سے بڑی مد اور سب سے چھوٹی مد کے درمیان فرق کو کہا جاتا ہے۔

(a) جماعتی حدود (b) درمیانی نقطہ (c) نسبتی تعدد (d) سعت

(vi) مرکزی رجحان کی پیمائش معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے:

(a) حقیقی جماعتی حدود (b) مجموعی تعدد (c) درمیانی قدر (d) تعدد

(vii) اگر 5، 7، 8، 9 اور x کا حسابی اوسط 7.5 ہو تو x کی قدر کیا ہوگی؟

(a) 10 (b) 8 (c) 8.5 (d) 5.8

(viii) دیے گئے مواد کا عادہ معلوم کریں: 10,7,3,1,0,9,8,5,2

(a) 5 (b) 7 (c) 0 (d) کوئی عادہ نہیں

(ix) کسی سلسلہ یا مواد میں وہ قیمت جو سب سے زیادہ مرتبہ آئے کہلاتی ہے:

(a) حسابی اوسط (b) عادہ (c) وسطانیہ (d) اوزانی اوسط

(x) دیے گئے مواد کا وسطانیہ معلوم کریں: 110, 125, 122, 130, 124, 127, 120

(a) 124 (b) 120 (c) 125 (d) 127

2۔ مندرجہ ذیل کی وضاحت کریں۔

(i) تعددی تقسیم (ii) کالمی نقشہ (غیر مساوی جماعتی حدود کے لیے)

(iii) حسابی اوسط (iv) وسطانیہ

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

3۔ درج ذیل میں 40 طلبہ کے اوزان تقریباً (پونڈ میں) ریکارڈ کیے گئے ہیں۔

138, 164, 150, 132, 144, 125, 149, 157, 146, 158, 140, 147, 136, 148, 152, 144, 168, 126, 138, 176, 163, 119, 154, 165, 146, 173, 142, 147, 135, 153, 140, 135 161, 145, 135, 142, 150, 156, 145, 128

(a) جماعتوں کی تعداد 6 لے کر ایک تعددی تقسیم کا جدول بنائیں۔ (b) کالمی نقشہ بنائیں۔

(c) دیے ہوئے مواد کا تعددی کثیر الاضلاع بھی بنائیں۔

4۔ نیچے دیے گئے تعددی تقسیم کے جدول کی مدد سے کالمی نقشہ پر تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

وزن (کلوگرام میں)	50 – 56	57 – 59	60 – 64	65 – 72	73 – 75	76 – 80
تعدد (f)	25	32	40	30	15	8

5۔ 45 طلبہ نے بائیولوجی کے ماہانہ ٹیسٹ میں درج ذیل نمبر حاصل کیے۔

حاصل کردہ نمبر	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 –39	40 –44	45 – 49
طلبہ کی تعداد	05	08	12	15	03	02

اوپر دی ہوئی تفصیل سے درج ذیل کے بارے میں بتائیں

(i) پانچویں جماعتی حد کی بالائی حقیقی جماعتی حد (ii) تمام جماعتوں کی زیریں حقیقی جماعتی حدود

(iii) تمام جماعتوں کا درمیانی نقطہ (iv) سب سے کم تعدد والی جماعت کی جماعتی حدود

6۔ دیے گئے تعددی تقسیم کے جدول کا کالمی نقشہ اور تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

جماعتی حدود	5 – 9	10 – 14	15 – 19	20 – 24	25 – 29	30 – 34
تعدد	1	8	18	11	2	5

7۔ دیے گئے جدول کا اوزانی اوسط معلوم کریں

اشیا	مقدار	اشیا کی لاگت (روپوں میں)
کرسی	20	500
میز	20	400
تختہ سیاہ	10	750
ٹیوب لائٹ	25	230
الماری	09	950

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

8۔ ایک سکول کا پرنسپل پانچ مختلف شعبوں کے لیے 50,000 روپے کے فنڈز مختص کرتا ہے۔

(i) کرسیاں = 15000 روپے (ii) میز = 12000 روپے

(iii) بلیک بورڈ = 6000 روپے (iv) کمروں کی تزئین و آرائش = 10,000 روپے

(v) باغبانی : 7000 روپے

سکول کے ہر شعبہ میں فنڈز مختص کرنے کی اوسط معلوم کریں۔

9۔ سعد کے چھ ٹیسٹوں میں حاصل کردہ نمبر 78, 87, 68, 72, 91, 84 تھے۔ اس کے نمبروں کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

10۔ ملحقہ تقسیم میں زیادہ سے زیادہ بوجھ کلو گرام میں دکھایا گیا۔ جسے کچھ رسیوں کی مدد سے سہارا دیا گیا تھا۔ مختصر طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے اوسط وزن معلوم کریں۔

زیادہ سے زیادہ بوجھ (کلو گرام میں)	93 – 97	98 – 102	103 – 107	108 – 112	113 – 117	118 – 122
رسیوں کی تعداد	2	5	8	12	6	2

11۔ عثمان نے آٹھ مرتبہ دو ڈائس پھینکے۔ ہر دفعہ ان کے مجموعہ کو ریکارڈ کر لیا گیا 11, 3, 4, 9, 6, 6, 5, 8۔ ان کے مجموعہ کا وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

12۔ دو شراکت دار اسلم اور کلثوم ایک کمپنی چلاتے ہیں۔ درج ذیل مواد میں کمپنی میں کام کرنے والے ملازمین کی ہفتہ وار اُجرت (روپوں میں) دی گئی ہے۔

اجرت (روپوں میں)	600 – 700	700 – 800	800 – 900	900 – 1000	1000 – 1100
ملازمین	3	5	7	21	11

دیے گئے جدول کا حسابی اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

یونٹ 13

احتمال (Probability)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ایک واقعہ ہونے کا احتمال اور ایک واقعہ رونما نہ ہونے کا احتمال معلوم کر سکیں۔
- احتمال سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کر سکیں۔
- احتمال کے تخمینے کے طور پر نسبتی تعدد کو معلوم کر سکیں۔
- نسبتی تعدد اور متوقع تعدد سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کر سکیں۔

تعارف (Introduction)

تاریخ

احتمال (Probability) کا لفظ لاطینی لفظ سے ماخوذ کیا گیا ہے۔ اس کا مطلب امکان (Probabilitias) ہے۔
گیرولاموکارڈانو (Girolamo Cardano) کو احتمال کا بانی جانا جاتا ہے۔ وہ ایک اٹلی کا ڈاکٹر اور ریاضی دان تھا۔

روز مرّہ زندگی میں ہم عام طور پر کہتے ہیں کہ اشیابنانے والی کمپنیاں اپنی مصنوعات پر گارنٹی دیتی ہیں۔ اِس بات کا امکان ہوتا ہے کہ کچھ مصنوعات گارنٹی کی مدت کو پورا نہیں کرتیں۔
کسی ٹیم کے کرکٹ میچ جیتنے کے امکانات کا فیصلہ اُس کی پچھلی کارگردگی کی بنیاد پر کیا جاتا ہے۔ مذکورہ بالا تمام بیانات میں مکمل یقین کے ساتھ پیش گوئی کا فقدان ہے۔ ایسے حالات میں عددی طور پر کون سی چیز ہمارے لیے آسانی پیدا کرے گی کہ کسی واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کے امکان کیا ہیں؟ وہ احتمال ہے۔ لہٰذا احتمال کسی خاص واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا امکان ہے۔
احتمال کو دیے ہوئے کلیہ کی مدد سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{احتمال} = \frac{\text{موافق نتائج کی تعداد}}{\text{ممکنہ نتائج کی کُل تعداد}}$$

اسے یوں لکھا جاتا ہے

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A) =$ واقعہ A کا احتمال

$n(A) =$ موافق نتائج کی تعداد

$n(S) =$ ممکنہ نتائج کی کُل تعداد

احتمال کے بنیادی تصوّرات (Basic Concepts of Probability)

تجربہ (Experiment)

وہ عمل جو نتائج پیدا کرتا ہے۔ مثلاً سکّہ اچھالنا، ڈائس (dice) کا پھینکنا وغیرہ کو تجربہ کہا جاتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

نتائج(Outcomes)

کسی تجربہ کے حاصل کو نتائج کہتے ہیں۔ مثلاً سکّہ اچھالنے کے ممکنہ نتائج ہیڈ اور ٹیل ہوتے ہیں۔ ڈائس کو پھینکنے کے ممکنہ نتائج 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 ہوتے ہیں۔

موافق نتیجہ(Favourable Outcome)

ایک ایسا نتیجہ جو اِس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ ہم کتنی بار واقعہ رونما ہونے کی توقع کرتے ہیں۔ مثلاً سکّہ اچھالنے کے وقت ایک موافق نتیجہ رونما ہوتا ہے ہیڈ یا ٹیل۔ جب کہ ڈائس پھینکنے کے وقت 2 کے اضعاف کے تین نتائج ہوتے ہیں جیسا کہ $\{2, 4, 6\}$۔

سیمپل اسپیس(Sample Space)

ایک تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کے سیٹ کو سیمپل اسپیس کہتے ہیں۔ اِس کو "S" سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر جب سکّہ اُچھالتے ہیں تو سیمپل اسپیس $S = \{H, T\}$ ہو گی۔ جب ڈائس پھینکا جاتا ہے تو سیمپل اسپیس $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہو گی۔

> **یاد رکھیے!**
> سیمپل اسپیس کے ہر رُکن کو سیمپل نقطہ کہتے ہیں۔

واقعہ(Event)

کسی تجربہ کے نتائج کے سیٹ کو واقعہ کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر ڈائس پھینکتے وقت جفت عدد کا رونما ہونا ایک واقعہ کہا جاتا ہے۔ جیسا کہ $A = \{2, 4, 6\};\ n(A) = 3$

> **یاد دہانی! واقعات کی اقسام**
>
> **یقینی واقعہ(Certain event):** ایسا واقعہ جو یقینی طور پر وقوع پذیر ہوتا ہے۔ یقینی واقعہ کا احتمال 1 ہوتا ہے۔
>
> **ناممکن واقعہ(Impossible event):** ایسا واقعہ جو کسی بھی تجربے میں واقع نہ ہو سکتا ہو۔ اِس واقعہ کا احتمال 0 ہوتا ہے۔
>
> **ممکنہ واقعہ(Likely event):** ایسا واقعہ جو ممکنہ طور پر وقوع پذیر ہو گا۔ اس کے واقعہ ہونے کے زیادہ امکانات ہوتے ہیں۔
>
> **غیر ممکنہ واقعہ(Unlikely event):** ایسا واقعہ جو رونما نہیں ہو گا۔ اس کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کم ہوتا ہے۔
>
> **مساوی ممکنہ واقعات(Equally likely events):** وہ واقعات جن کے وقوع پذیر ہونے کے مساوی امکانات ہوتے ہیں۔ اِن واقعات کا احتمال 0.5 ہوتا ہے۔

13.1 اکیلے واقعہ کا احتمال (Probability of Single Event)

مثال 1: عبد الرحیم ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ 3 پر تقسیم ہونے والے عدد کا احتمال کیا ہوتا ہے؟

حل: جب ڈائس پھینکا جاتا ہے تو سیمپل اسپیس ہو گی۔

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ ;\ n(S) = 6$$

فرض کریں واقعہ "A" 3 پر تقسیم ہونے والا عدد ہے۔

$$A = \{3, 6\};\ n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

پس 3 پر تقسیم ہونے والے عدد کا احتمال $\frac{1}{3}$ ہے۔

> **یاد رکھیے!**
> کسی بھی واقعہ کے لیے احتمال کی سعت ہوتی ہے
> $0 \leq P(A) \leq 1$

> **برائے اساتذہ!**
> مختلف رنگوں کی گیندیں یا پنسلیں وغیرہ لے کر تمام اقسام کے واقعات کے تصور کو واضح کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مثال2: اگر ذیشان 2 ڈائس پھینکتا ہے تو احتمال معلوم کریں کہ:

(i) دونوں ڈائس پر جفت اعداد ہوں۔

(ii) دونوں ڈائس پر 3 کے اضعاف ہوں۔

(iii) پہلے ڈائس پر جفت عدد اور دوسرے ڈائس پر ہندسہ "3" ہو۔

(iv) پہلے ڈائس پر ہندسہ کم از کم "3" ہو اور دوسرے ڈائس پر ہندسہ '4' ہو۔

حل: جب دونوں ڈائس کو اکٹھا پھینکا جاتا ہے تو سیمپل اسپیس ہو گی:

1^{st} / 2^{nd}	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

خود آزمائی!
جب 3 ڈائس اکٹھے پھینکے جاتے ہیں تو کیا آپ کُل سیمپل اسپیس کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں؟

(i) دونوں ڈائس پر جفت اعداد

فرض کریں واقعہ " A " میں دونوں ڈائس پر جفت اعداد حاصل ہوں۔

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2) (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$n(A) = 9; \; n(S) = 36$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

پس دونوں ڈائس پر جفت اعداد حاصل کرنے کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے۔

(ii) دونوں ڈائس پر 3 کے اضعاف

فرض کریں واقعہ "B" میں دونوں ڈائس پر 3 کے اضعاف حاصل ہوں۔

$$B = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$n(B) = 4; \; n(S) = 36$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

پس دونوں ڈائس پر 3 کے اضعاف حاصل کرنے کا احتمال $\frac{1}{9}$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(iii) پہلے ڈائس پر جفت عدد اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ 3

فرض کریں واقعہ "C" میں پہلے ڈائس پر جفت اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ "3" ہو۔

$$C = \{(2,3), (4,3), (6,3)\}$$
$$n(C) = 3;\ n(S) = 36$$
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

پس پہلے ڈائس پر جفت عدد اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ 3 حاصل کرنے کا احتمال $\frac{1}{12}$ ہے۔

(iv) پہلے ڈائس پر کم از کم ہندسہ "3" اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ "4" ہو۔

فرض کریں واقعہ "D" میں پہلے ڈائس پر کم از کم ہندسہ "3" اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ "4" حاصل ہو۔

$$D = \{(3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$
$$n(D) = 4;\ n(S) = 36$$
$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

پس پہلے ڈائس پر کم از کم ہندسہ "3" اور دُوسرے ڈائس پر ہندسہ "4" حاصل کرنے کا احتمال $\frac{1}{9}$ ہے۔

13.2 واقعہ وقوع پذیر نا ہونے کا احتمال (Probability of an Event Not Occurring)

بعض اوقات ہم اِس امکان میں دلچسپی رکھتے ہیں کہ سِکہ اُچھالتے وقت ہیڈ نہیں آئے گا۔

اگر واقعہ "A" میں سِکہ اُچھالتے وقت ہیڈ حاصل ہو، تو واقعہ "A'" میں سِکہ اُچھالتے وقت ہیڈ حاصل نا ہونے کا احتمال ہو گا۔

سِکہ اُچھالتے وقت ہیڈ حاصل نا ہونے کے احتمال کو واقعہ کا کمپلیمنٹ کہا جاتا ہے۔ اِس کو $P(A')$ یا $P(A^c)$ لکھا جاتا ہے۔

واقعہ "A" کے کمپلیمنٹ کو دیے گئے کلیہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$P(A') = 1 - P(A)$$

مثال کے طور پر سکّہ اُچھالتے وقت ہیڈ حاصل کرنے کا احتمال

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

برائے اساتذہ! واقعات کے کمپلیمنٹ کو واضح کرنے کے لیے مزید مثالیں دیں۔ اگر ایک سِکہ کو اچھالنے سے متوقع نتیجہ ہیڈ حاصل ہو تو اس کا کمپلیمنٹ ٹیل ہے۔ کیمپلیمنٹ اصول بیان کرتا ہے کہ ایک واقع کے احتمال اور اس کے کمپلیمنٹ کا مجموعہ 1 کے برابر ہونا چاہیے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

اور ہیڈ نا حاصل ہونے کا احتمال ہے:

$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

پس ہیڈ حاصل ہونے کا کمپلیمنٹ $\frac{1}{2}$ ہے۔

مثال 3: زبیر ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ ہندسہ 6 حاصل نا ہونے کا اِحتمال کیا ہو گا؟

یاد رکھیے!
واقعہ "A" کا احتمال اور واقعہ "A" نہیں کے احتمال کا مجموعہ ہمیشہ 1 ہوتا ہے۔
$P(A) + P(A') = 1$

حل: اگر واقعہ "A" میں ہندسہ "6" حاصل ہو

ڈائس اُچھالتے وقت سیمپل اسپیس ہوتی ہے: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$n(S) = 6$$
$$A = \{6\};\ n(A) = 1$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

ہندسہ "6" حاصل نا ہونے کا احتمال معلوم کرنے کے لیے ہم $\frac{1}{6}$ کو 1 میں سے تفریق کرتے ہیں۔

$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

پس ہندسہ 6 حاصل نا ہونے کا احتمال $\frac{5}{6}$ ہے۔

مثال 4: اگر دو ڈائس پھینکے جائیں تو احتمال کیا ہو گا کہ:

(i) دو مرتبہ 6 نا آئے (ii) دونوں ڈائس کا مجموعہ 8 نا ہو

حل: جب دو ڈائس پھینکے جاتے ہیں تو سیمپل اسپیس ہوتی ہے۔

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$n(S) = 36$$

(i) دو مرتبہ 6 نا آئے

فرض کریں واقعہ "A" میں دو مرتبہ 6 ہو۔

$$A = \{(6, 6)\};\ n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

اگر واقعہ " A' "میں دو مرتبہ 6 نا ہو۔

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{36-1}{36} = \frac{35}{36}$$

پس دو مرتبہ 6 حاصل نا ہونے کا احتمال $\frac{35}{36}$ ہے۔

(ii) ڈائس کا مجموعہ 8 نا ہو

فرض کریں واقعہ " B "میں دونوں ڈائس کا مجموعہ 8 ہو

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

$$n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

اگر واقعہ " B' "میں دونوں ڈائس کا مجموعہ 8 نا ہو۔

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

پس دونوں ڈائس کا مجموعہ 8 حاصل نا ہونے کا احتمال $\frac{31}{36}$ ہے۔

13.3 احتمال سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل
(Real Life Problems Involving Probability)

مثال 5: اگر 3 میزائل A، B اور C ہوں اور اِنہیں ایک ٹارگٹ پر فائر کرنا ہو۔ اگر ٹارگٹ پر فائر کرنے کا احتمال $P(A) = \frac{1}{4}$، $P(B) = \frac{3}{7}$، $P(C) = \frac{5}{9}$ ہو تو احتمال معلوم کریں۔

(i) میزائل A ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

(ii) میزائل B ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

(iii) میزائل C ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

حل: (i) میزائل A ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

چوں کہ $P(A) = \frac{1}{4}$

فرض کریں واقعہ " A' " میں میزائل A ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا۔

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

پس، میزائل A کا ٹارگٹ کو نشانہ نا بنانے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ii) میزائل B ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

چوں کہ $P(B) = \frac{3}{7}$

فرض کریں واقعہ "B'" میں میزائل B ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا۔

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

پس میزائل B کا ٹارگٹ کو نشانہ نا بنانے کا احتمال $\frac{4}{7}$ ہے۔

(iii) میزائل C ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا

اگرچہ $P(C) = \frac{5}{9}$

اگر واقعہ "C'" میں میزائل C ٹارگٹ کو نشانہ نہیں بناتا۔

$$P(C') = 1 - P(C)$$

$$= 1 - \frac{5}{9} = \frac{9-5}{9} = \frac{4}{9}$$

پس میزائل C کا ٹارگٹ کو نشانہ نا بنانے کا احتمال $\frac{4}{7}$ ہے۔

مثال 6: ایک تھیلے میں 5 نیلی گیندیں اور 8 سبز گیندیں ہیں۔ ایک گیند کے منتخب ہونے کا احتمال معلوم کریں جب وہ:

(i) نیلی گیند ہو　　(ii) سبز گیند ہو　　(iii) سبز گیند نا ہو

حل: (i) نیلی گیند ہو

فرض کریں واقعہ "A" میں نیلی گیند ہو

نیلی گیندیں $= n(A) = 5$

کُل گیندیں $= n(S) = 5 + 8 = 13$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{5}{13}$$

پس نیلی گیند کے منتخب ہونے کا احتمال $\frac{5}{13}$ ہے۔

> **خود آزمائی!**
> کیا آپ نیلی گیند منتخب کرنے کا کمپلیمنٹ معلوم کر سکتے ہیں؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ii)　سبز گیند ہو

فرض کریں واقعہ B میں سبز گیند ہو

$n(B) = 8 =$ سبز گیندیں

$n(S) = 5 + 8 = 13 =$ کُل گیندیں

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{8}{13}$$

پس سبز گیند کے منتخب ہونے کا احتمال $\frac{8}{13}$ ہے۔

(iii)　سبز گیند نا ہو

اگر واقعہ " B' " میں سبز گیند نا ہو۔

$$P(B') = 1 - P(B)$$
$$= 1 - \frac{8}{13}$$
$$= \frac{13-8}{13} = \frac{5}{13}$$

پس سبز گیند منتخب نا ہونے کا احتمال $\frac{5}{13}$ ہے۔

سوچیں!
اگر ایک شخص کے زندہ رہنے کا احتمال 0.75 ہو تو کیا آپ اِس واقعہ کا کمپلیمنٹ معلوم کر سکتے ہیں؟

مثال 7: تاش کے 52 پتوں (کارڈز) میں سے ایک پتّہ بے ترتیب منتخب کیا گیا۔ ایک پتّہ منتخب کرنے کا احتمال کیا ہے اگر:

(i)　پان کا پتّہ ہو　　　(ii)　نا حکم نا ہی پان کا پتّہ ہو

حل:　$n(S) = 52$ ؛ کُل پتّوں کی تعداد = 52

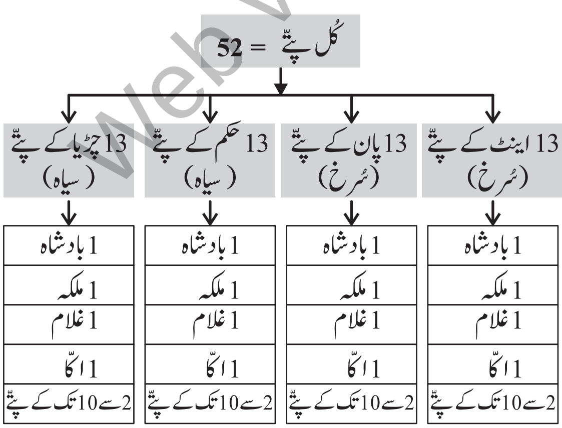
(i)　پان کا پتّہ ہو

اگر واقعہ "A" میں پان کا پتّہ ہو۔

$n(A) = 13$ ؛ پان کے کُل پتّوں کی تعداد = 13

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$
$$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

پس پان کا پتّہ منتخب کرنے کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے۔



Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(ii) پتّہ نا حکم نا ہی پان کا ہو

فرض کریں واقعہ " B " میں حکم اور پان کا پتّہ ہو۔

حکم اور پان کے پتّوں کی کُل تعداد = 26 ؛ $n(B) = 26$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{26}{52}$$

$$= \frac{1}{2}$$

اگر واقعہ " B' " میں نا حکم اور نا ہی پان کا پتّہ ہو۔

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

پس نا حکم اور نا ہی پان کا پتّہ منتخب کرنے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے۔

Web version of PCTB textbook

مشق نمبر 13.1

1۔ ارشد ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ جس کے اطراف میں L, M, N, O, P, U درج ہو۔ ڈائس پر صحیح حرف آنے کا احتمال کیا ہے؟

2۔ شازیہ نے ڈائس کا ایک جوڑا پھینکا۔ احتمال کیا ہو گا جب کہ:

(i) نقاط کا مجموعہ کم از کم 4 ہو۔ (ii) دونوں نقاط کے درمیان کا حاصل ضرب 5 سے 10 کے درمیان ہو۔

(iii) دونوں نقاط کے درمیان کا فرق 4 کے برابر ہو۔

(iv) پہلے ڈائس پر کم از کم 5 اور دوسرے ڈائس پر کم از کم 4 ہو۔

3۔ "MATHEMATICS" کے لفظ سے بے ترتیب ایک حرف تہجی منتخب کیا گیا ہے۔ احتمال معلوم کریں جب کہ وُہ:

(i) حرف علت ہو (ii) حرف صحیح ہو (iii) حرف E ہو

(iv) حرف A ہو (v) حرف M نہ ہو (vi) حرف T نہ ہو

4۔ اسلم ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ ہندسہ 3 یا 4 حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟ نیز ہندسہ 3 یا 4 حاصل نا ہونے کا احتمال بھی معلوم کریں۔

NOT FOR SALE-PESRP

5۔ عبدالہادی نے کارڈز کو 1 تا 30 تک لیبل کیا اور ایک ڈبہ میں ڈال دیا۔ وہ ایک کارڈ بے ترتیب منتخب کرتا ہے۔ منتخب شدہ کارڈ کا احتمال کیا ہے جب کہ وُہ:

(i) عدد 25 ہو (ii) عدد 17 سے 22 کے درمیان ہو (iii) عدد کم از کم 20

(iv) عدد 27 اور 29 نا ہو (v) عدد 12 سے 15 کے درمیان نا ہو۔

6۔ عائشہ کے امتحان پاس کرنے کا احتمال 0.85 ہے۔ عائشہ کے امتحان پاس نا کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟

7۔ تابش ایک سکہ اچھالتا ہے اور ایک ڈائس پھینکتا ہے۔ درج ذیل واقعات کا احتمال کیا ہو گا؟

(i) سکہ پر ٹیل اور ڈائس پر کم از کم ہندسہ 4 آئے۔

(ii) سکہ پر ہیڈ اور ڈائس پر ہندسے 2 اور 3 آئیں۔

(iii) سکہ پر ہیڈ اور ٹیل اور ڈائس پر ہندسہ 6 آئے۔

(iv) سکہ پر ٹیل نا آئے اور ڈائس پر ہندسہ 5 نا آئے۔

(v) سکہ پر ہیڈ اور ڈائس پر ہندسے 5 اور 2 نا آئیں۔

8۔ اچھی طرح ملائے گئے تاش کے 52 پتوں میں سے ایک پتّہ منتخب کیا گیا۔ احتمال کیا ہو گا اگر منتخب شدہ پتّہ:

(i) ملکہ ہو (ii) نا ملکہ اور نا ہی غلام ہو۔

9۔ تاش کے 52 پتوں میں سے ایک پتّہ منتخب کیا گیا۔ احتمال کیا ہو گا اگر منتخب شدہ پتّہ:

(i) غلام ہو (ii) اینٹ نا ہو۔

13.4 نسبتی تعدد متوقع احتمال کے طور پر

(Relative Frequency as an Estimate of Probability)

نسبتی تعدد ہمیں بتاتی ہے کہ کیسے ایک مخصوص واقعہ کل تعداد کے مقابلے میں کتنی مرتبہ پیش آتا ہے۔ اس کو درج ذیل طریقہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{نسبتی تعدد} = \frac{\text{مخصوص واقعہ کی تعداد}}{\text{کُل تعداد}} = \frac{x}{N}, \quad \text{جب کہ} \quad N = \Sigma f$$

مثال 8: دیے گئے جدول کا نسبتی تعدد معلوم کریں۔

X	2	3	4	5	6	7	8
f	3	5	6	9	10	8	2

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

حل:

X	f	نسبتی تعدد
2	3	$\frac{3}{43} = 0.07$
3	5	$\frac{5}{43} = 0.12$
4	6	$\frac{6}{43} = 0.14$
5	9	$\frac{9}{43} = 0.21$
6	10	$\frac{10}{43} = 0.23$
7	8	$\frac{8}{43} = 0.19$
8	2	$\frac{2}{43} = 0.04$
مجموعہ	$\Sigma f = 43$	

13.5 نسبتی تعدد کا حقیقی زندگی میں اطلاق
(Real Life Application of Relative Frequency)

مثال 9: نویں جماعت کے 80 طلبہ پر ایک سروے کیا گیا۔ اور ان کے پسندیدہ رنگ کے بارے میں پوچھا گیا۔ جوابات یہ ہیں۔

(i) سرخ رنگ: 23 طلبہ (ii) سبز رنگ: 15 طلبہ (iii) گلابی رنگ: 25 طلبہ

(iv) نیلا رنگ: 10 طلبہ (v) سفید رنگ: 7 طلبہ

ہر رنگ کا نسبتی تعدد معلوم کریں۔

ذہن میں رکھیں!
تمام نسبتی تعدد کا مجموعہ ہمیشہ 1 کے تقریباً برابر ہوتا ہے۔

حل: طلبہ کی کُل تعداد = 80

(i) سرخ رنگ کا نسبتی تعدد = $\frac{23}{80} = 0.29$

اس کا مطلب ہے کہ 29% طلبہ سرخ رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

(ii) سبز رنگ کا نسبتی تعدد = $\frac{15}{80} = 0.19$

اس کا مطلب ہے کہ 19% طلبہ سبز رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

یاد رکھیے!
نسبتی تعدد ایک اندازہ لگاہوا احتمال ہے۔ جب ایک تجربہ کو مقررہ تعداد تک دہرایا جاتا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

(iii) $0.31 = \frac{25}{80}$ = گلابی رنگ کا نسبتی تعدد

اس کا مطلب ہے کہ 31% طلبہ گلابی رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

(iv) $0.12 = \frac{10}{80}$ = نیلے رنگ کا نسبتی تعدد

اس کا مطلب ہے کہ 12% طلبہ نیلے رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

(v) $0.09 = \frac{7}{80}$ = سفید رنگ کا نسبتی تعدد

اس کا مطلب ہے کہ 9% طلبہ سفید رنگ کو ترجیح دیتے ہیں۔

مثال 10: عبد الرحمن نے 100 نمبروں میں سے مختلف مضامین میں مختلف نمبر حاصل کیے۔ تفصیل درج ذیل ہے۔

مضمون	اُردو	انگریزی	اسلامیات	ریاضی	سائنس	کمپیوٹر سائنس
حاصل کردہ نمبرز	75	80	72	95	81	85

مندرجہ بالا مواد کا نسبتی تعدد معلوم کریں۔

حل:

مضمون	**حاصل کردہ نمبرز**	**نسبتی تعدد**
اُردو	75	$\frac{75}{488} = 0.15$
انگریزی	80	$\frac{80}{488} = 0.16$
اسلامیات	72	$\frac{72}{488} = 0.15$
ریاضی	95	$\frac{95}{488} = 0.19$
سائنس	81	$\frac{81}{488} = 0.17$
کمپیوٹر سائنس	85	$\frac{85}{488} = 0.17$
مجموعہ	$\Sigma f = 488$	

خود آزمائی!

ایک سکول کے 200 طلبہ میں سے 80 کرکٹ، 50 فٹ بال اور 25 والی بال کھیلتے ہیں جب کہ 45 کوئی کھیل نہیں کھیلتے۔ کیا آپ ان طلبہ کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں جو کوئی کھیل نہیں کھیلتے اور ان طلبہ کا نسبتی تعدد معلوم کر سکتے ہیں جو کرکٹ کھیلتے ہیں؟

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

13.6 متوقع تعدد (Expected Frequence)

برائے اساتذہ!
طلبہ کو متوقع تعدد کے تصور کو احتمال کے اندازہ کے طور پر مختلف روز مرہ زندگی کے مسائل کو استعمال کرتے ہوئے واضح کریں۔

متوقع تعدد ایسا پیمانہ ہے جس سے اندازا لگایا جاتا ہے کہ احتمال پر منحصر کوئی واقعہ کتنی مرتبہ پیش آنا چاہیے۔

واقعہ کا احتمال × کل تجربات کی تعداد = متوقع تعدد

$= N \times P(A)$

مثال 11: چھے ڈائس 50 مرتبہ پھینکے گئے۔ مختلف تعداد میں 6 آنے کے احتمال درج ذیل دیے گئے ہیں۔ درج ذیل مواد کی متوقع تعدد معلوم کریں۔

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0.09	0.10	0.12	0.24	0.10	0.20	0.15

ہر چھکے کے وقوع پذیر ہونے کے متوقع تعدد معلوم کریں۔

حل:

چھے کی تعداد (x)	$P(x)$	متوقع تعدد $= N \times P(x) = 50 \times P(x)$
0	0.09	$50 \times 0.09 = 4.5$
1	0.10	$50 \times 0.10 = 5$
2	0.12	$50 \times 0.12 = 6$
3	0.24	$50 \times 0.24 = 12$
4	0.10	$50 \times 0.10 = 5$
5	0.20	$50 \times 0.20 = 10$
6	0.15	$50 \times 0.15 = 7.5$

13.7 متوقع تعدد کا حقیقی زندگی میں اطلاق

(Real Life Application on Expected Frequency)

مثال 12: ایک ڈائس 300 مرتبہ اُچھالا گیا۔ ہندسہ 1 یا 6 حاصل ہونے کی اوسط تعداد معلوم کریں۔

حل: جب ایک ڈائس پھینکا جاتا ہے تو "S" سیمپل اسپیس ہوتی ہے۔

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(S) = 6$

فرض کریں واقعہ "B" میں ہندسہ 1 یا 6 آئے۔

$B = \{1, 6\}$; $n(B) = 2$

یاد رکھیے!
تمام متوقع تعدد کا مجموعہ ہمیشہ ایک مقررہ تعداد کے تجربات کے تقریباً برابر ہوتا ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

پس $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

اس لیے $E(B) = N \times P(B)$

$= 300 \times \frac{1}{3} = 100$

پس ہندسہ 1 یا 6 حاصل ہونے کی اوسط تعداد 100 ہے۔

مثال 13: اگر خراب بولٹ کا احتمال 0.3 ہو تو کُل 800 بولٹ میں سے غیر ناقص بولٹ کی تعداد معلوم کریں۔

حل: خراب بولٹ کا احتمال $= 0.3$

غیر ناقص بولٹ کا احتمال $= 1 - 0.3 = 0.7$

غیر ناقص بولٹ کی تعداد $= 800 \times 0.7 = 560$

پس غیر ناقص بولٹ کی تعداد 560 ہو گی۔

مشق نمبر 13.2

1۔ ایک محقق نے روسی فوج کی ہارس ریکس سے ہونے والی ہلاکتوں کی تعداد کا مواد جمع کیا۔ جدول درج ذیل ہے۔

ہلاکتوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6
تعداد	60	50	87	40	32	15	10

دیے گئے مواد کی نسبتی تعدد معلوم کریں۔

2۔ 750 نمونوں میں سے ناقص مصنوعات کا جدول درج ذیل دیا گیا ہے۔ دیے گئے جدول کے لیے نسبتی تعدد معلوم کریں۔

ناقص مصنوعات کی تعداد فی نمونہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
نمونوں کی تعداد	120	140	94	85	105	50	40	66	50

3۔ واقفیت عامہ پر ایک کوئز کا مقابلہ منعقد کیا گیا۔ سوالات کے 100 سیٹوں کے لیے 5 سوالات میں سے درست جوابات کی تعداد ذیل میں دی گئی ہے۔

X	0	1	2	3	4	5
f	10	23	15	25	18	9

دیے گئے مواد کے لیے نسبتی تعدد معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

4۔ ایک جماعت کے 108 طلبہ سے ایک سروے کیا گیا۔ اور ان کے پسندیدہ کھانے کے بارے میں پوچھا گیا۔ جوابات درج ذیل ہیں۔

کھانے کی اشیا کا نام	بریانی	تازہ جوس	مُرغی	باربی کیو	مٹھائی
طلبہ کی تعداد	40	07	21	15	25

(i) کتنے فی صد طلبہ بریانی کو پسند کرتے ہیں؟

(ii) کتنے فی صد طلبہ مرغی پسند کرتے ہیں؟

(iii) طلبہ نے کون سا کھانا سب سے کم پسند کیا؟

(iv) طلبہ کون سے کھانے کو سب سے زیادہ ترجیح دیتے ہیں؟

5۔ دو ڈائس کو 500 دفعہ پھینکا گیا، اگر مجموعہ 8 سے زیادہ ہو تو متوقع تعداد کیا ہو گی؟

6۔ اگر ایک شخص تین سکوں کو ایک دفعہ اُچھالے اور کم از کم 2 ہیڈ حاصل کرے تو اسے 120 روپے انعام ملنے کی کیا توقع ہو گی؟

7۔ اگر ایک تجربہ 200 بار دہرایا جاتا ہے۔ تو دیے گئے مواد کی متوقع تعداد معلوم کریں۔

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0.11	0.21	0.17	0.18	0.09	0.17	0.07

8۔ 6 ڈائس اُچھالتے ہوئے 5 مرتبہ چھکا آنے کا احتمال $\frac{2}{5}$ ہے۔ ڈائس 200 مرتبہ پھینکے گئے ہیں۔ آپ کتنی بار توقع کریں گے کہ یہ 5 چھکے دکھائے گا؟

جائزہ مشق 13

1۔ ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) سیمپل اسپیس کا ہر رکن کہلاتا ہے:

(a) واقعہ　(b) تجربہ　(c) سیمپل نقطہ　(d) نتائج

(ii) ایک نتیجہ جو اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ ہم کتنی بار واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کی توقع کرتے ہیں کہلاتا ہے:

(a) نتائج　(b) موافق نتیجہ　(c) سیمپل اسپیس　(d) سیمپل نقطہ

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

(iii) ہمیں کس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک مخصوص واقعہ کُل تعداد کے مقابلے میں کتنی بار آتا ہے؟

(a) متوقع تعدد (b) نسبتی تعدد کا مجموعہ (c) نسبتی تعدد (d) تعدد

(iv) کسی واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا متوقع احتمال اس طرح بھی جانا جاتا ہے۔

(a) نسبتی تعدد (b) متوقع تعدد (c) حقیقی جماعتی حدود (d) متوقع تعدد کا مجموعہ

(v) تمام متوقع تعدد کا مجموعہ کس مقررہ عدد کے برابر ہے؟

(a) کُل تجربات (b) متوقع تعدد

(c) نتائج (d) واقعات

(vi) کسی خاص واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کہلاتا ہے:

(a) سیمپل اسپیس (b) متوقع احتمال (c) احتمال (d) متوقع تعدد

(vii) ایسا واقعہ جو رونما ہو گا اور اِس کے ہونے کا امکان زیادہ ہو کہلاتا ہے:

(a) مساوی ممکنہ واقعہ (b) ممکنہ واقعہ (c) غیر ممکنہ واقعہ (d) یقینی واقعہ

(viii) جب چار ڈائس پھینکے جاتے ہیں تو سیمپل اسپیس کی کُل تعداد معلوم کریں۔

(a) 6^2 (b) 6^3 (c) 6^4 (d) 6^6

(ix) اگر ڈائس کا جوڑا پھینکا جائے تو دو بار 2 آنے کا احتمال کیا ہو گا؟

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{1}{36}$

(x) تاش کے 52 پتوں میں سے ایک پتّہ منتخب کیا، غلام اور بادشاہ نا آنے کا کیا احتمال ہو گا؟

(a) $\frac{2}{13}$ (b) $\frac{11}{13}$ (c) $\frac{2}{52}$ (d) $\frac{11}{52}$

2۔ درج ذیل کی وضاحت کریں۔

(i) نسبتی تعدد (ii) متوقع تعدد

3۔ ایک صراحی میں 10 سرخ گیندیں، 5 سبز گیندیں اور 8 نیلی گیندیں ہیں۔

بے ترتیب چناؤ کرتے ہوئے احتمال معلوم کریں:

(i) سبز گیند ہو (ii) سُرخ گیند ہو (iii) نیلی گیند ہو

(iv) سرخ گیند نا ہو (v) سبز گیند نا ہو

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

4۔ تین سکّے ایک ساتھ اُچھالے گئے۔ احتمال معلوم کریں اگر:

(i) تین ہیڈ ہوں (ii) کم از کم دو ٹیل ہوں

(iii) کم از کم دو ہیڈ نا ہوں (iv) دو ہیڈ نا ہوں

5۔ تاش کے 52 پتّوں میں سے ایک پتّہ منتخب کیا گیا۔ احتمال کیا ہو گا اگر:

(i) سرخ رنگ کا بادشاہ اور غلام ہو (ii) 2 چڑیا اور حکم کا 2 نا ہو۔

6۔ چھے سکّے 600 بار اُچھالے گئے۔ نیچے دیے گئے جدول میں ٹیل کے وقوع پذیر ہونے کا ریکارڈ دیا گیا ہے۔

ٹیل کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6
تعدد	110	90	105	80	76	123	16

دیے گئے جدول کا نسبتی تعدد معلوم کریں۔

7۔ 25 اشیا پر مشتمل لاٹ میں سے 18 اشیا ناقص ہیں۔

غیر ناقص اشیا کا نسبتی تعدد معلوم کریں اور غیر ناقص اشیا کی متوقع تعدد بھی معلوم کریں۔

Web version of PCTB textbook

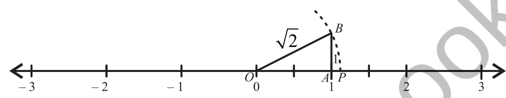
NOT FOR SALE-PESRP

جوابات

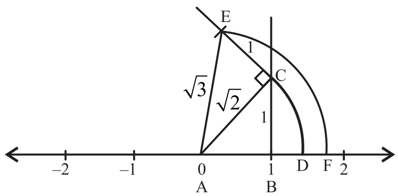
مشق 1.1

1۔ (i) ناطق (ii) ناطق (iii) غیر ناطق (iv) غیر ناطق (v) غیر ناطق
(vi) غیر ناطق (vii) غیر ناطق (viii) غیر ناطق (ix) ناطق (x) غیر ناطق

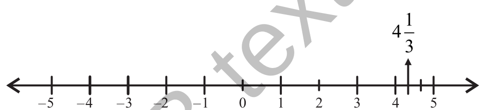
2۔ (i)



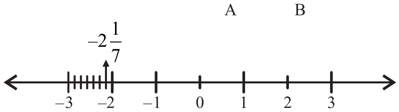
(ii)



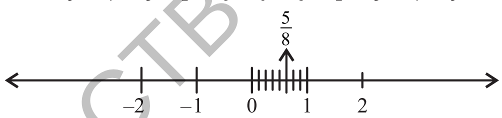
(iii)



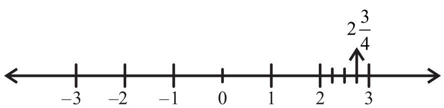
(iv)



(v)



(vi)



3۔ (i) $\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{37}{99}$ (iii) $\frac{21}{99}$

4۔ (i) خاصیتِ تلازم بلحاظ جمع (ii) خاصیتِ مبادلہ بلحاظ جمع
(iii) جمعی معکوس (iv) ضرب کی بائیں خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع
(v) جمعی ذاتی عنصر (vi) ضربی ذاتی عنصر
(vii) خاصیتِ تلازم بلحاظ ضرب (viii) خاصیتِ مبادلہ بلحاظ ضرب

5۔ (i) جمعی خاصیت (ii) معکوس خاصیت (iii) جمعی خاصیت
(iv) ضربی خاصیت (v) ضربی خاصیت (vi) ثلاثی خاصیت خاصیت

مشق 1.2

1۔ (i) $4-\sqrt{3}$ (ii) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}$ (iii) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{5}$ (iv) $17-12\sqrt{2}$ (v) $5-2\sqrt{6}$
(vi) $2\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

2۔ (i) $\frac{8}{27}$ (ii) 12 (iii) $\frac{10}{3}$ (iv) x^2yz^4 (v) $\frac{1}{6}$
(vi) $\frac{9}{2}$ (vii) $\frac{27}{16}$ (viii) 243 (ix) 19

3۔ (i) 6 (ii) $2\sqrt{8}$ (iii) 34
(iv) $12\sqrt{8}$ (v) 1154 (vi) 32

4۔ $P=-25, q=18$

5۔ (i) $\frac{3375}{512}$ (ii) $\frac{2}{3}$
(iii) $\frac{6}{5}$ (iv) $a+b^2$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

مشق 1.3

1۔ 13, 14, 15 2۔ $\overline{AB} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$ 3۔ $(11\sqrt{2} - 2)m^2$ 4۔ 45, 23

5۔ 118.4 6۔ 20 سال 7۔ 1.33% 8۔ 6225 روپے 9۔ 52500 روپے

جائزہ مشق 1

1۔ (i) c (ii) d (iii) d (iv) d (v) a (vi) b (vii) b (viii) a (ix) d (x) d

7۔ (i) $\frac{x^3y^7}{z^4}$ (ii) 3^{2x} (iii) 27 8۔ 15, 17, 19 9۔ 34, 62 10۔ 540750

مشق 2.1

1۔ (i) 2×10^6 (ii) 4.89×10^4 (iii) 4.2×10^{-3} (iv) 9×10^{-7} (v) 7.3×10^4 (vi) 6.5×10^1

2۔ (i) 804 (ii) 300000 (iii) 0.015 (iv) 17700000 (v) 0.0000055 (vi) 0.00004

3۔ 300000000 m/sec 4۔ 4.0075×10^7 m

5۔ 6779 km 6۔ 12756 km

مشق 2.2

1۔ (i) $\log_{10} 1000 = 3$ (ii) $\log_2 256 = 8$ (iii) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ (iv) $\log_{20} 400 = 2$

(v) $\log_{16} \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ (vi) $\log_{11} 121 = 2$ (vii) $\log_q p = r$ (viii) $\log_{32} \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$

2۔ (i) $5^3 = 125$ (ii) $2^4 = 16$ (iii) $23^0 = 1$ (iv) $5^1 = 5$

(v) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ (vi) $9^{\frac{1}{2}} = 3$ (vii) $10^5 = 100000$ (viii) $4^{-2} = \frac{1}{16}$

3۔ (i) $x = 4$ (ii) $x = 0$ (iii) $x = 8$ (iv) $x = \frac{1}{1000}$ (v) $x = 8$ (vi) $x = 10$

مشق 2.3

1۔ (i) 3 (ii) 1 (iii) −2 (iv) 2 (v) −5 (vi) 5

2۔ (i) 1.6335 (ii) 2.7627 (iii) 0.2971 (iv) −1.0575 (v) −1.3279 (vi) −3.4510

3۔ (i) 3.5019 (ii) 1.5019 (iii) −1.4981 4۔ (i) $x = 1.015$ (ii) $x = 15.56$

(iii) $x = 0.0003681$ (iv) $x = 0.02675$ (v) $x = 2270$ (vi) $x = 0.009585$

مشق 2.4

1۔ (i) 1 (ii) 7 (iii) −2 (iv) 2 (v) 5 (vi) 1

2۔ (i) log 45 (ii) log 27 (iii) $6 \log_a b$ (iv) $\log_3 x^2y$ (v) $\log_5 \frac{x^4z}{y}$ (vi) $\ln \frac{a^2b^3}{c^4}$

3۔ (i) $\log 11 - \log 5$ (ii) $\frac{3}{2}\log_5 2 + 3\log_5 a$ (iii) $2 \text{ In } a + \text{In } b - \text{In } c$ (iv) $\frac{1}{9}[\log x + \log y - \log z]$

(v) $\frac{4}{3}\ln 2 + \ln x$ (vi) $5[\log_2(1-a) - \log_2 b]$ 4۔ (i) $x = 5$ (ii) $x = 4$ (iii) $x = -10$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(iv) $x = 5$ (v) $x = 22$ (vi) $x = 5\frac{2}{3}$ ۔5 (i) 2.960 (ii) 23.62 (iii) 1.339

(iv) 14.21 ۔6 $M = 3$ ۔7 14 سال ۔8 17.17 °C

جائزہ مشق 2

۔1 (i) c (ii) b (iii) b (iv) d (v) a (vi) c (vii) d (viii) c (ix) d (x) c

۔2 (i) 5.67×10^{-4} (ii) 7.34×10^{2} (iii) 3.3×10^{2} ۔3 (i) 2600 (ii) 0.0008794

(iii) 0.000006 ۔4 (i) $\log_3 2187 = 7$ (ii) $\log_a c = b$ (iii) $\log_{12} 144 = 2$

۔5 (i) $4^x = 8$ (ii) $9^3 = 729$ (iii) $4^5 = 1024$

۔6 (i) $x = 3$ (ii) $x = -\frac{1}{2}$ (iii) $x = -\frac{3}{5}$ ۔7 (i) $\log \frac{x^7}{y^6}$ (ii) $\log 2$ (iii) $\log_5 2$

۔8 (i) $\log x + \log y + 6 \log z$ (ii) $\frac{1}{6}\left[5\log_3 m + 3\log_3 n\right]$ (iii) $\frac{3}{2}\left[\log 2 + \log x\right]$

۔9 (i) 4.086 (ii) 1133 (iii) 24.01 ۔10 2035

مشق 3.1

۔1 (i) $\{x \mid x = n^2, n \in N \wedge 1 \le n \le 22\}$ (ii) $\{x \mid x = 2^n, n \in N \wedge 1 \le n \le 8\}$

(iii) $\{x \mid x \in Z \wedge -1000 \le x \le 1000\}$ (iv) $\{x \mid x = 6n, n \in N \wedge 1 \le n \le 20\}$

(v) $\{x \mid x = 100 + 2n, n \in W \wedge 0 \le n \le 150\}$ (vi) $\{x \mid x = 3^n, n \in W\}$

(vii) $\{x \mid$ کا مقسوم علیہ ہے x $100\}$ (viii) $\{x \mid x = 5n, n \in N \wedge 1 \le n \le 20\}$

(ix) $\{x \mid x \in Z \wedge -100 < x\ 1000\}$ ۔2 (i) $\{3, 6, 9, \ldots, 36\}$ (ii) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

(iii) $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ (iv) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$ (v) $\{2,4,8,16,32,64,128\}$

(vi) { } (vii) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (viii) { }

۔4 ہاں { } یا ∅ ۔5 $\{a, b\}$ سے مُراد ایک ایسا سیٹ جو دو ارکان a اور b پر مشتمل ہے۔ جب کہ $\{\{a, b\}\}$ سے مُراد ایک ایسا سیٹ جو ایک رُکن $\{a, b\}$ پر مشتمل ہے۔

۔6 (i) 1 (ii) 4 (iii) 128 (iv) 256 (v) 4 (vi) 8

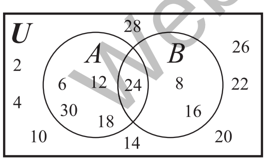
۔7 (i) $\{\varnothing, \{9\}, \{11\}, \{9, 11\}\}$

(ii) $\{\varnothing, \{+\}, \{-\}, \{\times\}, \{\div\}, \{+,-\}, \{+,\times\}, \{+,\div\}, \{-,\times\}, \{-,\div\}, \{\times,\div\}, \{+,-,\times\}, \{+,-,\div\}, \{+,\times,\div\}, \{-,\times,\div\}, \{+,-,\times,\div\}\}$

(iii) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (iv) $\{\varnothing, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\}$

مشق 3.2

۔1 (i) $A = \{6, 12, 18, 24, 30\}, B = \{8, 16, 24\}$ (ii) $A \cap B = \{24\}$ (iii)



۔2 (i) $G = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$,
$H = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144\}$

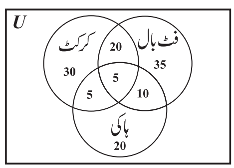
(ii) $G \cup H = \{1, 2, 4, 8, 9, 16, 25, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 128, 144\}$

(iii) $G \cap H = \{1, 4, 16, 64\}$

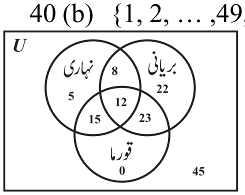
۔3 (ii) $P \cup Q = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19\}$ (i) $P \cap Q = \{2, 3, 5, 7\}$

۔7 9 ۔8 130 ۔9 9 ۔10 18 ۔11 (a) $\{1, 2, \ldots, 49, 90, 91, \ldots, 100\}$ (b) 40

۔12 (a) 5 (b)



۔13 (a) 85 (b) 45 (c) 27 (d)



Web version of PCTB textbook

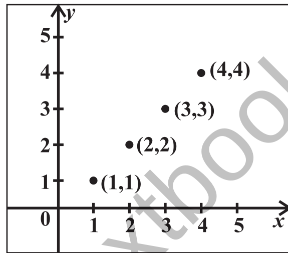
NOT FOR SALE-PESRP

مشق 3.3

1۔ (i) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

(i) کاڈومین $= \{1, 2, 3, 4\}$

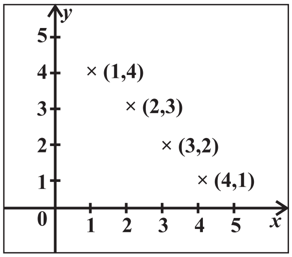
(i) کی رینج $= \{1, 2, 3, 4\}$



(ii) $\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

(ii) کاڈومین $= \{1, 2, 3, 4\}$

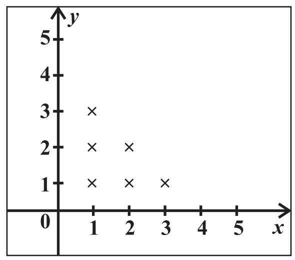
(ii) کی رینج $= \{1, 2, 3, 4\}$



(iii) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

(iii) کاڈومین $= \{1, 2, 3\}$

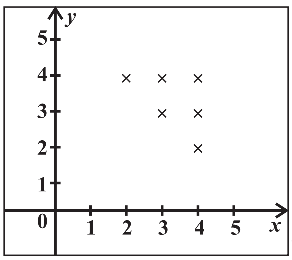
(iii) کی رینج $= \{1, 2, 3\}$



(iv) $\{(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

(iv) کاڈومین $= \{2, 3, 4\}$

(iv) کی رینج $= \{2, 3, 4\}$



2۔ شکل 1 تفاعل کو ظاہر نہیں کرتی۔ شکل 2 ایک تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جو کہ بائی جیکٹو تفاعل ہے۔
شکل 3 ایک تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جو کہ بائی جیکٹو تفاعل ہے۔ شکل 4 ایک تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جو کہ اِن-ٹو تفاعل ہے۔

3۔ (i) 2 (ii) −7 (iii) 4 (iv) 2 (v) 17 (vi) $\frac{5}{4}$ 4۔ $a = 2$ ، $b = 1$ 5۔ $a = \frac{10}{3}$ ، $b = -\frac{5}{3}$

6۔ $x = 6$ 7۔ $c = \frac{4}{3}$ ، $d = \frac{14}{3}$

جائزہ مشق 3

1۔ (i) b (ii) c (iii) a (iv) d (v) d (vi) b (vii) b (viii) d (ix) a (x) b

2۔ (i) $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ (ii) $\{3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$ (iii) $\{0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110\}$
(iv) ∅ (v) ∅ (vi) ∅ (vii) $\{0\}$ (viii) Q 3۔ (i) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
(ii) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ (iii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ (iv) $\{6, 8, 10\}$ (v) ∅
(vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (vii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (viii) ∅

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

8۔ $\{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$

10۔ (i) -2 (ii) -9 (iii) $-\frac{41}{3}$ (iv) 5 (v) 645 (vi) 95

11۔ $a = \frac{7}{6}, b = \frac{16}{3}$ 12۔ 15 13۔ $m = \frac{15}{16}, n = 5$

14۔ $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}, B = \{31, 32, 33, \dots, 55\}, C = \{76, 77, 78, \dots, 100\}$
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \dots, 30, 31, 32, \dots, 55, 76, 77, \dots, 100\}$

15۔ (a) 150 (b) 30 (c) 30 (d) 90 16۔ (a) 260 (b) 160 (c) 40 (d) 50

مشق 4.1

1۔ (i) $6(x+2)$ (ii) $5y(3y+4)$ (iii) $-3x(4x+1)$ (iv) $4ab(a+2b)$ (v) $x(y-3x+2)$ (vi) $3ab(a-3b+5)$

2۔ (i) $5(x+3)$ (ii) $(x+1)(x+3)$ (iii) $(x+2)(x+4)$ (iv) $(x+2)^2$

3۔ (i) $(x+4)(x-3)$ (ii) $(x+5)(x+2)$ (iii) $(x-4)(x-2)$ (iv) $(x-8)(x+7)$
(v) $(x-12)(x+2)$ (vi) $(y+6)(y-2)$ (vii) $(y+9)(y+4)$ (viii) $(x-2)(x+1)$

4۔ (i) $(2x+1)(x+3)$ (ii) $(2x+5)(x+3)$ (iii) $(4x+1)(x+3)$ (iv) $(3x+2)(x+1)$
(v) $(3y-2)(y-3)$ (vi) $(2y-1)(y-2)$ (vii) $(4z-3)(z-2)$ (viii) $(3x+2)(3-x)$

مشق 4.2

1۔ (i) $(2x^2-6xy+9y^2)(2x^2+6xy+9y^2)$ (ii) $(a^2-4ab+8b^2)(a^2+4ab+8b^2)$
(iii) $(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$ (iv) $(x^2-4x+1)(x^2+4x+1)$
(v) $(x^2-6xy+3y^2)(x^2+6xy+3y^2)$ (vi) $(x^2-3xy+y^2)(x^2+3xy+y^2)$

2۔ (i) $(x^2+5x+5)^2$ (ii) $(x^2-5x+3)(x^2-5x-13)$
(iii) $(2x^2+7x+4)^2$ (iv) $(3x^2+5x+6)(3x^2+5x+2)$
(v) $(x^2+4x+6)(x^2+8x+6)$ (vi) $(x^2-5x+2)(x^2+5x+2)$

3۔ (i) $(2x+1)^3$ (ii) $(3a+4b)^3$ (iii) $(x+6y)^3$ (iv) $(2x-5y)^3$

4۔ (i) $(5a-1)(25a^2+5a+1)$ (ii) $(4x+5)(16x^2-20x+25)$ (iii) $(x^2-3)(x^4+3x^2+9)$
(iv) $(10a+1)(100a^2-10a+1)$ (v) $(7x+6)(49x^2-42x+36)$ (vi) $(3-8y)(9+24y+64y^2)$

مشق 4.3

1۔ (i) HCF $= 7xy$ (ii) HCF $= 2x-3y$ (iii) HCF $= x^2+x+1$ (iv) HCF $= a(a+3)$
(v) HCF $= t+1$ (vi) HCF $= x+8$

2۔ (i) HCF $= 3x-2$ (ii) HCF $= x^2-4x+3$ (iii) HCF $= 2(x^2+1)$ (iv) HCF $= x(x-2)$

3۔ (i) LCM $= 12a^2b^2$ (ii) LCM $= x^2(x+1)$ (iii) LCM $= a(a-2)^2$ (iv) LCM $= x(x^4-16)$ (v) LCM $= 4(4-x^2)(x+3)$

4۔ $y^2-12y+35$

5۔ $q(x) = 9x^3(x^3-a^3)$ 6۔ $12x^2(x-a)(x+a)^3$

مشق 4.4

1۔ (i) $\pm(x-4)$ (ii) $+(3x \pm 2)$ (iii) $\pm(6a+7)$ (iv) $\pm(8y-2)$
(v) $\pm\sqrt{2}(10t-3)$ (vi) $\pm\sqrt{10}(2x+3)$

2۔ (i) $\pm(2x^2-7x-3)$ (ii) $\pm(11x^2-9x-12)$ (iii) $\pm(x^2-5xy+y^2)$ (iv) $\pm(2x^2-3x+7)$

3۔ $x = 2$ یا $x = 4$ 4۔ $x = 5$ 5۔ $x = 2$ یا $x = 1$ ، $x = 0$ 6۔ $x = 3$ یا $x = 1$

جائزہ مشق 4

1۔ (i) a (ii) b (iii) b (iv) c (v) c (vi) a (vii) c (viii) a (ix) c (x) a

Web version of PCTB textbook

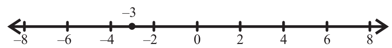
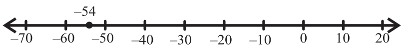
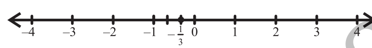
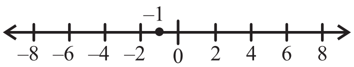
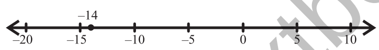
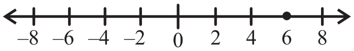
NOT FOR SALE-PESRP

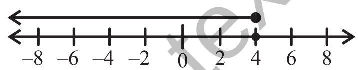
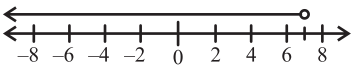
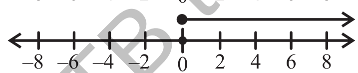
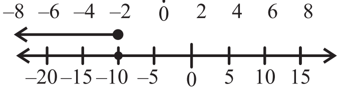
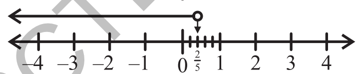
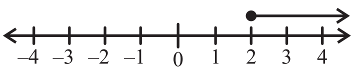
2۔ (i) $2x(2x^2+9x-6)$ (ii) $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$ (iii) $(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)$
(iv) $-(x+3)(x+20)$ (v) $(2x+1)(x+3)$ (vi) $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$ (vii) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$
(viii) $x(x+9)(x^2+9x+38)$ (ix) $(x^2+6x-3)^2$

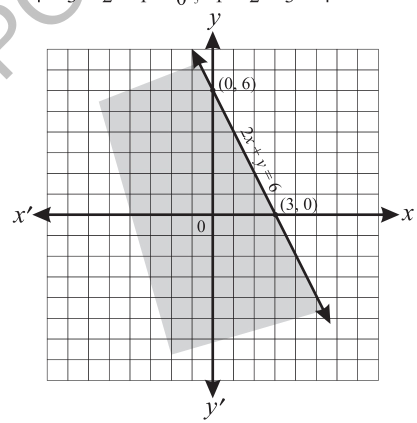
3۔ (i) LCM = $8x^2(x+2)(x+3)$, HCF = $4x$ (ii) LCM = $x(x-1)(x-3)(x+4)$, HCF = $x-1$
(iii) LCM = $(x-4)(x+4)^2$, HCF = $x+4$ (iv) LCM = $x(x+2)(x^2-9)$, HCF = $x-3$

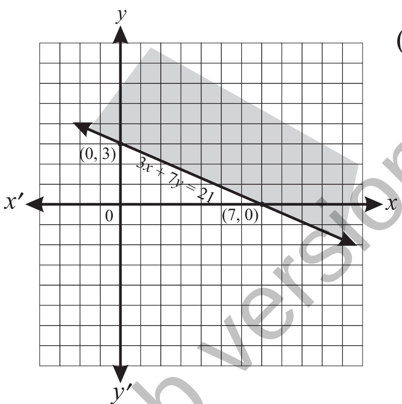
4۔ $\pm(4x^2+1)$ 5۔ 3 سال یا 5 سال

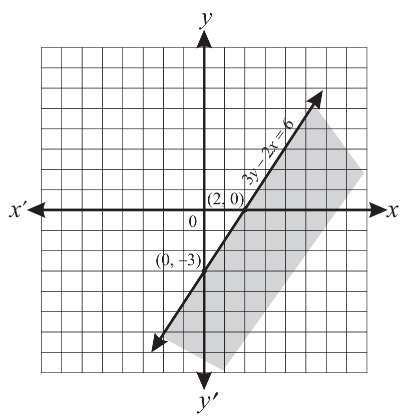
مشق 5.1

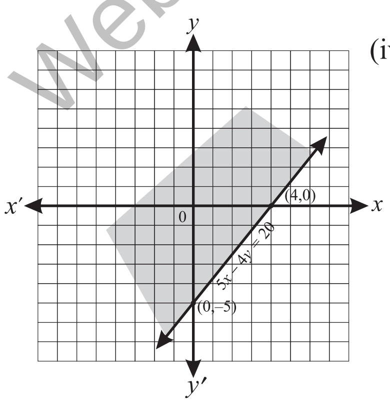
1۔ (i) $x=-3$

(ii) $x=-54$

(iii) $x=-\frac{1}{3}$

(iv) $x=-1$

(v) $x=-14$

(vi) $x=6$


2۔ (i) $x\le 4$

(ii) $x<7$

(iii) $x\ge 0$

(iv) $x\le -10$

(v) $x<\frac{2}{5}$

(vi) $x\ge 2$


3۔ (i)


(ii)


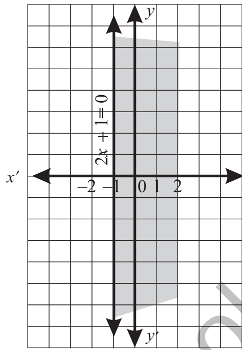
(iii)


(iv)


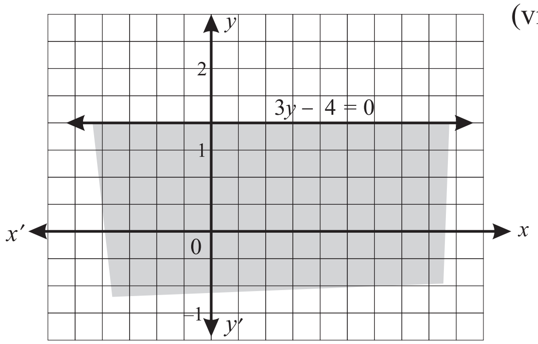
NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

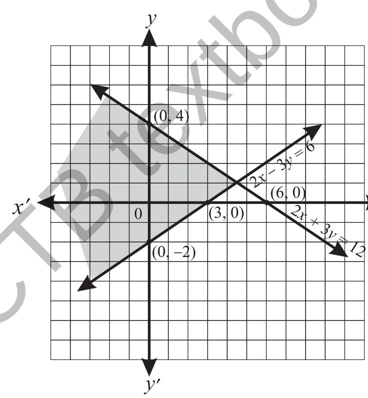
(v)



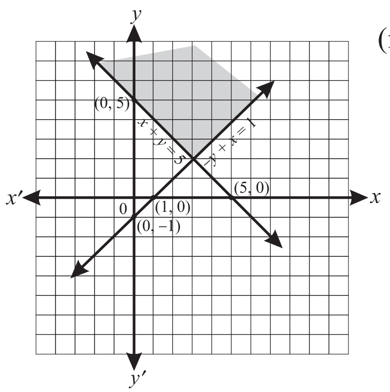
(vi)



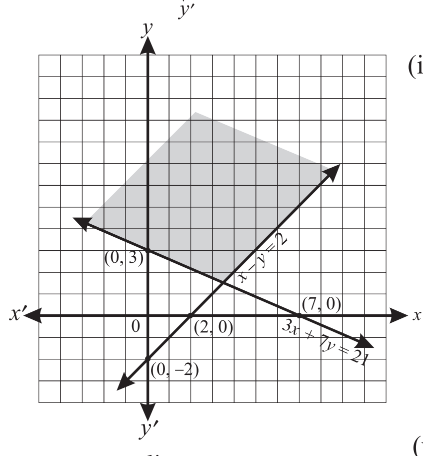
2۔ (i)



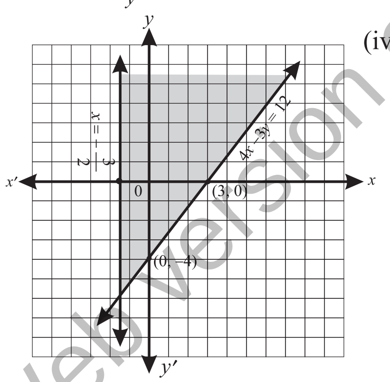
(ii)



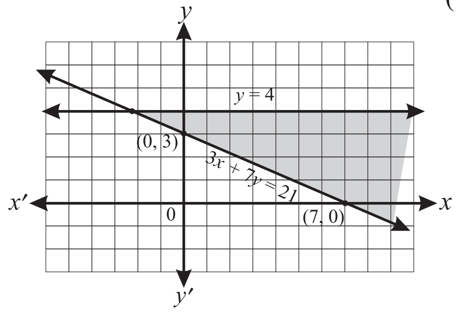
(iii)



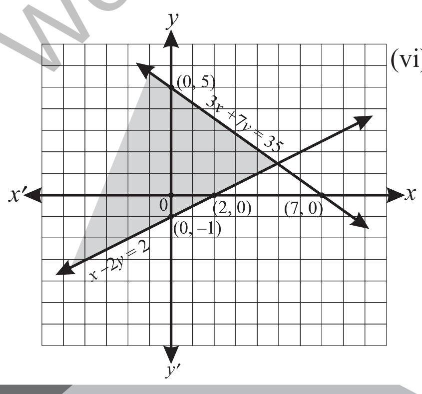
(iv)



(v)



(vi)



Web version of PCTB textbook

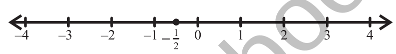
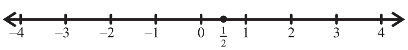
NOT FOR SALE-PESRP

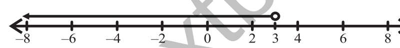
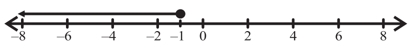
مشق 5.2

1۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کونے کے نقطہ (16, 12) پر ہے۔
2۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کونے کے نقطہ (0, 5) پر ہے۔
3۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کونے کے نقطہ (0, 4) پر ہے۔
4۔ کم سے کم قیمت کونے کے نقطہ (0, 3) پر ہے۔
5۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کونے کے نقطہ (2, 6) پر ہے۔
6۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کونے کے نقطہ (9, 0) پر اور کم سے کم قیمت کونے کے نقطہ (0, 3) پر ہے۔

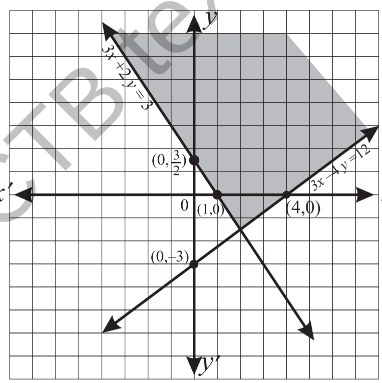
جائزہ مشق 5

1۔ c (i)　c (ii)　c (iii)　d (iv)　b (v)　b (vi)　b (vii)　c (viii)　b (ix)　b (x)

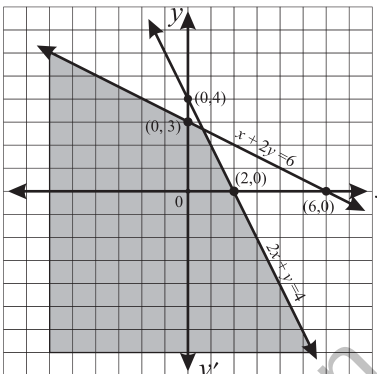
2۔ (i) $x = -\frac{1}{2}$ 　(ii) $x = \frac{1}{2}$ 

(iii) $x < 3$ 　(iv) $x \leq -1$ 

3۔ (i)



(ii)



4۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کونے کے نقطہ (0, 4) پر ہے۔
5۔ کم سے کم قیمت کونے کے نقطہ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ پر ہے۔

مشق 6.1

1۔ (i) 1^{st}, 425°　(ii) 2^{nd}, −225°　(iii) 4^{th}, 320°　(iv) 3^{rd}, −150°　(v) 3^{rd}, 210°

2۔ (i) 123° 27′ 21.6″　(ii) 58° 47′ 20.76″　(iii) 90° 34′ 4.08″

3۔ (i) 65.5375°　(ii) 42.3125°　(iii) 78.76°

4۔ (i) $\frac{\pi}{5}$ ریڈین　(ii) $\frac{\pi}{8}$　(iii) $\frac{3\pi}{8}$ ریڈین

5۔ (i) 11.25°　(ii) 396°　(iii) 210°

6۔ (i) (a) 6.28 cm　(b) 18.84 cm²　(ii) (a) 4 cm　(b) 3.06 cm²

7۔ 75.4 cm², 16.67%　8۔ 6.25%　9۔ 12 cm, 5 cm

مشق 6.2

1۔ (a) (i) $\frac{4}{5}$　(ii) $\frac{3}{5}$　(iii) $\frac{4}{3}$　(iv) $\frac{5}{3}$　(v) $\frac{5}{4}$　(vi) $\frac{4}{3}$　(vii) $\frac{3}{4}$　(viii) $\frac{5}{3}$　(ix) $\frac{5}{4}$　(x) $\frac{4}{5}$

(b) (i) $\frac{8}{17}$　(ii) $\frac{15}{17}$　(iii) $\frac{8}{15}$　(iv) $\frac{17}{15}$　(v) $\frac{17}{8}$　(vi) $\frac{8}{15}$　(vii) $\frac{15}{8}$　(viii) $\frac{17}{15}$　(ix) $\frac{17}{8}$　(x) $\frac{8}{17}$

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTBtextbook

(c) (i) $\frac{5}{13}$ (ii) $\frac{12}{13}$ (iii) $\frac{5}{12}$ (iv) $\frac{13}{5}$ (v) $\frac{13}{12}$ (vi) $\frac{5}{12}$ (vii) $\frac{12}{5}$ (viii) $\frac{13}{12}$ (ix) $\frac{13}{5}$ (x) $\frac{5}{13}$

2۔ (i) $\frac{c}{b}$ (ii) $\frac{a}{b}$ (iii) $\frac{c}{a}$ (iv) $\frac{a}{b}$ (v) $\frac{c}{b}$ (vi) $\frac{a}{c}$

4۔ (i) $\cos 60°$ (ii) $\sin 60°$ (iii) $\cot 60°$ (iv) $\cot 30°$ (v) $\cos 30°$ (vi) $\sin 30°$ (vii) $\cos 45°$ (viii) $\cot 45°$ (ix) $\sin 45°$

5۔ (i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{a}{b}$ (iii) $\frac{c}{a}$ (iv) $\frac{b}{c}$ (v) $\frac{a}{c}$ (vi) $\frac{a}{b}$ (vii) $\frac{c}{b}$ (viii) $\frac{a}{c}$ (ix) $\frac{b}{c}$ (x) $\frac{c}{a}$

مشق 6.3

1۔ (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{2}$, $\sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(ii) $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $\sec\theta = \frac{4}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$

(iii) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot\theta = 2$

(iv) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$, $\tan\theta = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\cot\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(v) $\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $\tan\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $\sec\theta = \sqrt{\frac{5}{3}}$

مشق 6.4

1۔ (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (iv) $\sqrt{3}$ (v) 2 (vi) $\frac{1}{2}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (viii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ix) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (x) 2 (xi) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (xii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2۔ (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $2\sqrt{2}$ (iv) 1 (v) 0 (vi) $\frac{1}{2}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (viii) 2

3۔ (i) 0 (ii) $\frac{7}{\sqrt{2}}$ (iii) $\sqrt{2}$

مشق 6.5

1۔ (i) $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$cm, $z = \frac{8}{\sqrt{3}}$cm (ii) $x = \sqrt{3}$cm, $z = \sqrt{6}$cm (iii) $x = 1$cm, $y = \sqrt{3}$cm (iv) $x = 4$cm, $z = 4\sqrt{2}$cm

2۔ (i) $b = 4$cm, $m\angle A = 25.64°$, $m\angle C = 64.36°$ (ii) $b = 4\sqrt{2}$cm, $m\angle A = m\angle C = 45°$

3۔ $60\sqrt{2}$ m

4۔ (i) $a = 3$ cm, $b = 6$ cm, $m\angle A = 30°$ (ii) $b = 8\sqrt{2}$ cm, $c = 8$ cm, $m\angle A = 45°$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(iii) $b = 6\sqrt{5}$ cm, $m\angle A = 63.4°$, $m\angle C = 26.6°$ (iv) $b = 8$ cm, $a = 4\sqrt{3}$ cm, $m\angle C = 30°$
(v) $a = \frac{4}{\sqrt{3}}$ cm , $b = \frac{8}{\sqrt{3}}$ cm, $m\angle C = 60°$ (vi) $c = 8$ cm, $m\angle A = 36.9°$, $m\angle C = 53.1°$
5۔ 1.18 ریڈین, 12 m 6۔ $5\sqrt{5}$ cm 7۔ 7.75 m 8۔ 8 m 9۔ (i) 16 cm (ii) 5 cm

مشق 6.6

1۔ 69.28 m 2۔ 2.89 cm 3۔ 35.7° 4۔ 11.55 *m* 5۔ 86.6 m 6۔ 49.98° 7۔ 33.69°
8۔ 87.4 m 9۔ 142.5 m, 109.2 m 10۔ 91.92 m

جائزہ مشق 6

1۔ (i) d (ii) a (iii) a (iv) b (v) c (vi) b (vii) d (viii) a (ix) d (x) a

2۔ (a) (i) $\frac{17\pi}{12}$ ریڈین (ii) $\frac{101\pi}{240}$ ریڈین (iii) $\frac{19\pi}{24}$ ریڈین (b) (i) 127° 30′ (ii) 105° (iii) 123°45′

4۔ $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sec\theta = \sqrt{\frac{11}{2}}$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{11}}{3}$, $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{11}}$, $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{11}}$

5۔ 56.42 m 6۔ 9.06 m

مشق 7.1

1۔ (i) دائیں آدھی مستوی (ii) پہلا ربع (iii) y-محور (iv) x-محور (v) چوتھا ربع اور منفی y-محور
(vi) مبدا (vii) یہ پہلے اور تیسرے ربع کا ناصف خط ہوتا ہے۔ (viii) خط $x = 3$ پر دائیں طرف واقع نقاط کا سیٹ۔
(ix) x-محور کے اوپر واقع نقاط کا سیٹ۔ (x) دوسرے اور چوتھے ربع میں نقاط کا سیٹ۔ 2۔ (i) $3\sqrt{13}$ (ii) $4\sqrt{5}$
(iii) $\sqrt{53}$ (iv) $\sqrt{113}$ 3۔ (i) (a) $5\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{29}$ (c) $\frac{2\sqrt{109}}{3}$ (ii) (a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$
(b) (−3, 1) (c) $\left(-2\sqrt{5}, \frac{7}{3}\right)$ 4۔ (i) $\left(\sqrt{176}, 7\right)$ مبدا سے 15 یونٹس کے فاصلہ پر ہے۔
(ii) (10, −10) مبدا سے 15 یونٹس کے فاصلہ پر نہیں ہے۔ (iii) (1, 15) مبدا سے 15 یونٹس کے فاصلہ پر نہیں ہے۔

6۔ h = 0 7۔ h = 1 8۔ C(0, −3) ; رداس = $\sqrt{26}$ 9۔ h = −10 یا h = 6

مشق 7.2

1۔ (i) m = 1, α = 45° (ii) m = −9, α = 96° 20′ (iii) m = ∞, α = 90° 3۔ (i) $k = -11$
(ii) $k = \frac{23}{2}$ 5۔ (a) خطوط نا متوازی اور نا ہی عمودی ہیں۔
(b) خطوط نا متوازی اور نا ہی عمودی ہیں۔ 6۔ (a) $y + 9 = 0$ (b) $x + 5 = 0$
(c) $7x - y + 47 = 0$ (d) $y + 3 = 0$ (e) $x + 8 = 0$ (f) $x - 7y - 16 = 0$
(g) $5x + y + 7 = 0$ (h) $4x - 3y + 12 = 0$ (i) $4x + y + 36 = 0$
7۔ $4x + 2y - 37 = 0$ 8۔ $2x - 3y - 10 = 0$ 9۔ $24x + y - 259 = 0$

10۔ (a) (i) $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}$ (ii) $\frac{x}{\frac{-11}{2}} + \frac{y}{\frac{11}{4}} = 1$ (iii) $x\cos(116.57°) + y\sin(116.57°) = \frac{11}{2\sqrt{5}}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(b) (i) $y=\frac{-4}{7}x+\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{2}{7}}=1$ (iii) $x\cos(60.26^\circ)+y\sin(60.26^\circ)=\frac{2}{\sqrt{65}}$

(c) (i) $y=\frac{8}{15}x-\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{x}{\frac{3}{8}}+\frac{y}{-\frac{1}{5}}=1$ (iii) $x\cos(298.07^\circ)+y\sin(298.07^\circ)=\frac{3}{17}$

11۔ (a) متوازی (b) عمودی (c) نامتوازی اور نا ہی عمودی

12۔ $2x-7y+57=0$ 13۔ $x+y+3=0$

مشق 7.3

1۔ $\sqrt{85}\approx 9.22$ km 2۔ $(10, 5)$ 3۔ $\sqrt{61}\approx 7.81$ m 4۔ $\sqrt{89}\approx 9.43$ km

5۔ $(6, 11)$ 6۔ $(5, 7)$ 7۔ $4\sqrt{29}\approx 21.5$ اکائیاں 8۔ 26 اکائیاں 9۔ $10\sqrt{5}\approx 22.4$ اکائیاں

10۔ احاطہ = 20 اکائیاں 11۔ 16 اکائیاں

جائزہ مشق 7

1۔ (i) c (ii) a (iii) b (iv) a (v) b (vi) a (vii) b (viii) a (ix) c (x) d

2۔ $5\sqrt{2}$ 3۔ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 4۔ $\frac{4}{3}$ 5۔ $y=2x+1$ 6۔ $\frac{2}{3}$ 7۔ $\sqrt{97}\approx 9.85$ اکائیاں

8۔ $(6, 5)$ 9۔ $\frac{3}{2}, 4\sqrt{13}\approx 14.4$ اکائیاں 10۔ (a) $y=-3x+2$ (b) $y-2=-3(x-1)$

(c) $\frac{y-2}{-7-2}=\frac{x-1}{4-1}$ (d) $\frac{y}{2}+\frac{x}{\frac{2}{3}}=1$ (e) $\frac{y}{\sqrt{10}}+\frac{3x}{\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$ (f) $x\cos(-71.56^\circ)+y\sin(-71.56^\circ)=\frac{2}{\sqrt{10}}$

مشق 8

1۔ (i) a (ii) d (iii) c (iv) a (v) b (vi) a (vii) c (viii) b (ix) c (x) b

مشق 9.1

1۔ متشابہ 3۔ $m\overline{DF}=10$cm, $m\overline{EF}=8$cm 4۔ (i) $x=3$ cm (ii) $x=2.25$ cm (iii) $x=2.19$ cm

5۔ 10 cm 6۔ 7.11m 7۔ $x=10\frac{2}{3}$ cm, $y=8$ cm, $z=13\frac{1}{3}$ cm 8۔ $m\overline{CE}=1.5$ cm 9۔ $\frac{18\sqrt{2}}{5}$

مشق 9.2

1۔ (i) 1:9 (ii) 9:16 (iii) 4:49 (iv) 64:81 (v) 36:25 2۔ (i) 86.4 cm^2

(ii) 106.67 cm^2 (iii) 7.03125 cm^2 (iv) 150 cm^2 (v) 12.6 cm 3۔ (a) 100 cm^2

(b) 64 cm^2 4۔ $5\frac{5}{9}$ cm^2 5۔ 1024 cm^2 6۔ $\frac{4}{5}$ 7۔ 22.5 cm^2 8۔ 289 cm^2

مشق 9.3

1۔ $\frac{27}{64}$ 2۔ $\frac{2}{3}$ 3۔ (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{16}{25}$ 4۔ (i) 648 cm^3 (ii) 4 cm^3 (iii) 2744 cm^3 (iv) 8 cm 5۔ (i) 42.67 m^2

(ii) 810 cm^3 6۔ (i) 90 m^2 (ii) 1250 m^3

مشق 9.4

1۔ (i) 1440° (ii) 120° (iii) 72° (iv) 9 اضلاع 2۔ 42.42 cm^2 3۔ $m\angle ABC=110^\circ$

Web version of PCTB textbook

$m\angle BCD = 70°$, $m\angle CDA = 110°$ ‏4۔ شکل اندرونی زاویوں $360°$ کے مجموعہ کے ساتھ اقلیدسی نمونہ بناسکتی ہے۔

5۔ مربع بنانے کے لیے 600 عکس کی ضرورت ہوگی۔ ‏6۔ 190 cm, 1623.8 cm^2 ‏7۔ 180 ٹائلز ‏8۔ 35 گیلن

9۔ 6ℓ ‏10۔ 4.5 m^2

جائزہ مشق 9

1۔ (i) a (ii) b (iii) b (iv) d (v) c (vi) d (vii) c (viii) a (ix) b (x) d

3۔ 4:1, 8:1 ‏4۔ (a) 1:100 (b) 1:1000 (c) 1:10 (d) 1:1 ‏5۔ 4ℓ , 1.69ℓ

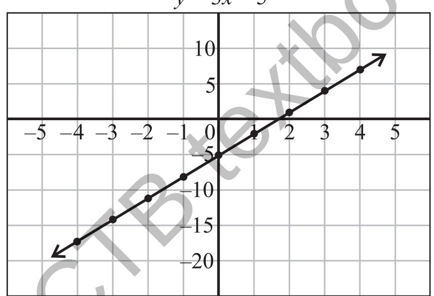
6۔ 125 mℓ ، 216 mℓ ‏7۔ (a) 1:50 (b) 1:125000 (c) 3 cm (d) 7500 cm^2

8۔ (a) 12:13 (b) 1728:2197 ‏10۔ 6.69 m^2

مشق 10.1

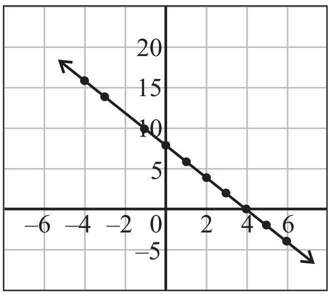
1۔ (i)

$y = 3x - 5$



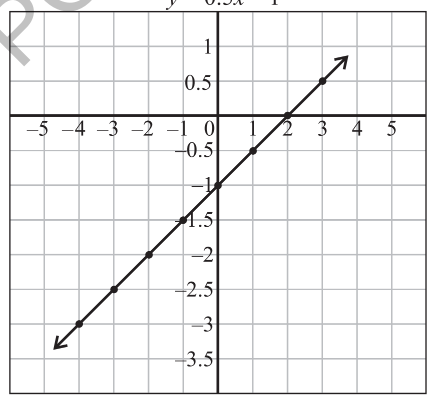
(ii)

$y = -2x + 8$



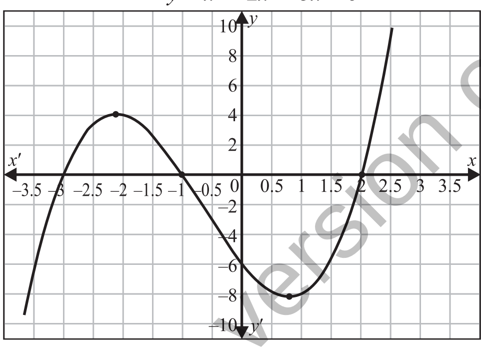
(iii)

$y = 0.5x - 1$



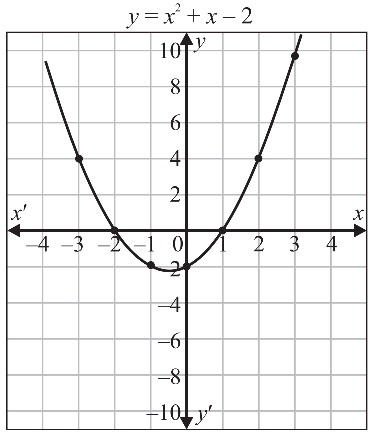
2۔ (i)

$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$



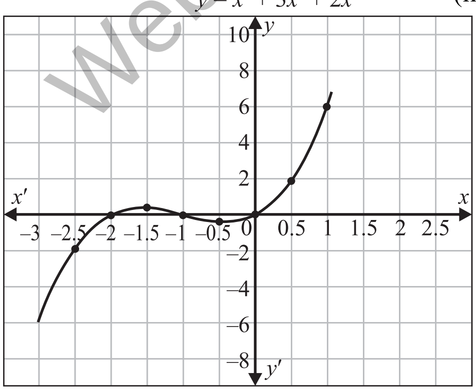
(ii)

$y = x^2 + x - 2$



(iii)

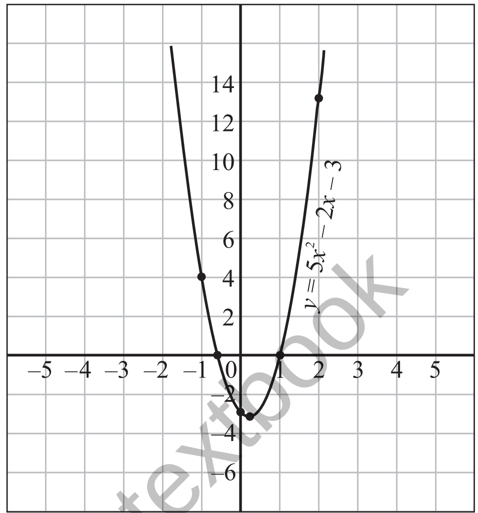
$y = x^3 + 3x^2 + 2x$



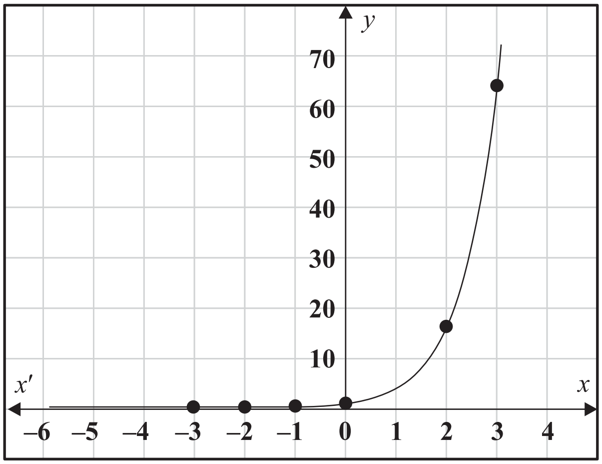
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

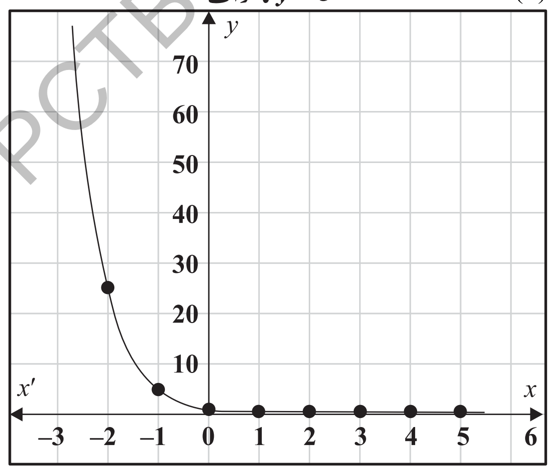
(iv) $y = 5x^2 - 2x - 3$



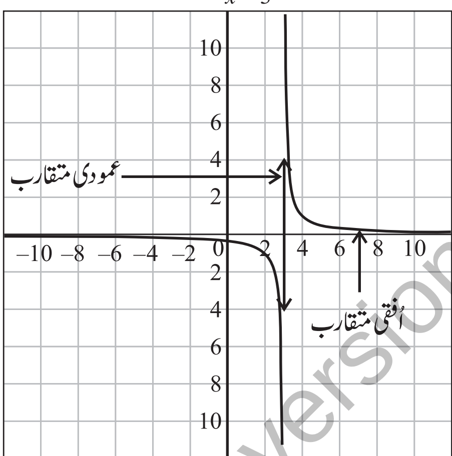
3۔ (i) $y = 4^x$ کا گراف



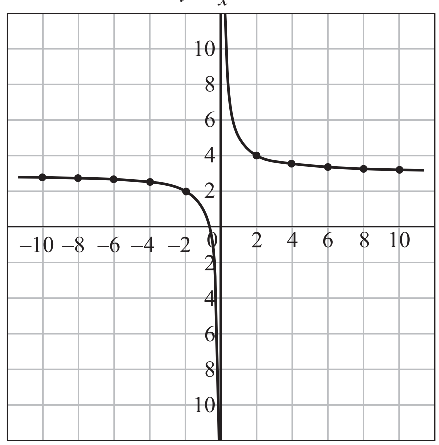
(ii) $y = 5^{-x}$ کا گراف



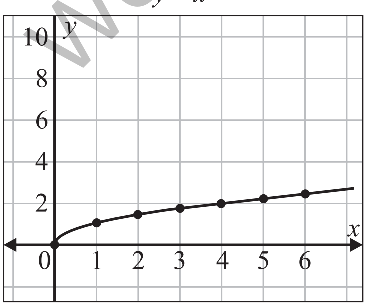
(iii) $y = \dfrac{1}{x-3}$



(iv) $y = \dfrac{2}{x} + 3$



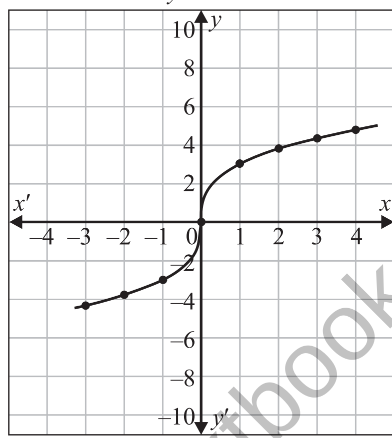
(v) $y = x^{\frac{1}{2}}$



NOT FOR SALE-PESRP

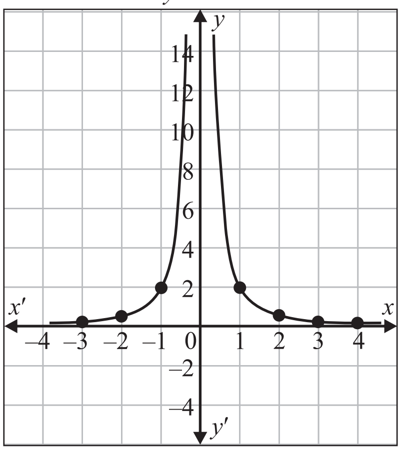
(vi)

$y = 3x^{\frac{1}{3}}$



(vii)

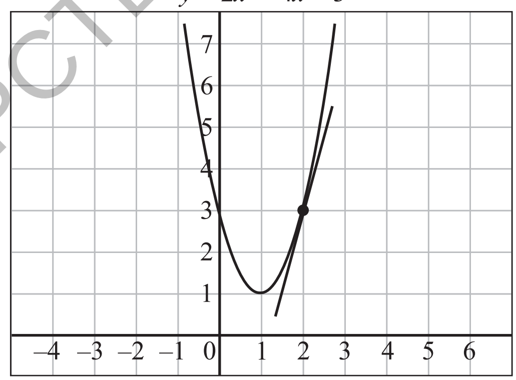
$y = 2x^{-2}$



مشق 10.2

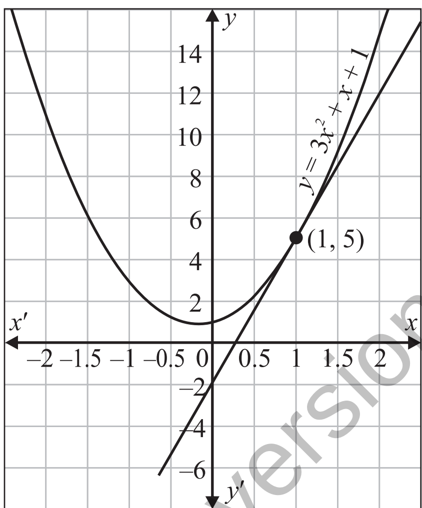
1۔

$y = 2x^2 - 4x + 3$



میلان = 4

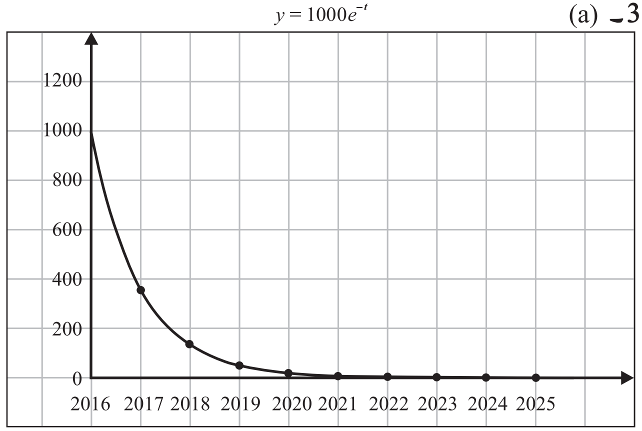
2۔



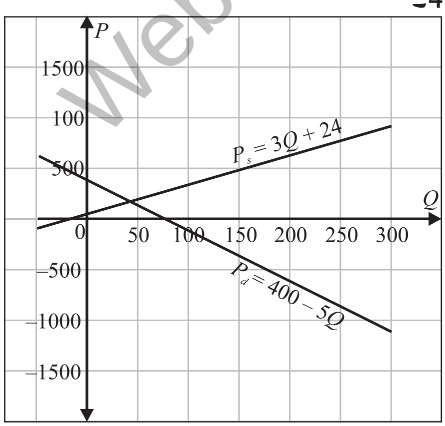
میلان = 7

3۔ (a)

$y = 1000e^{-t}$



4۔



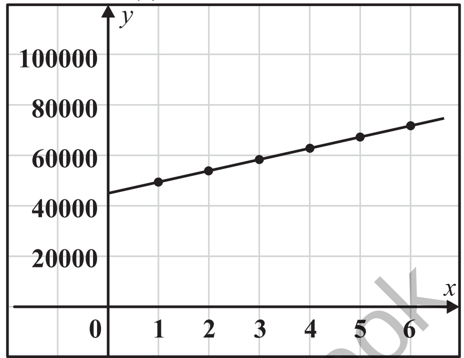
(b)

گراف سے، 2019 میں طلبہ کی تعداد تقریباً 50 اور 2023 میں تقریباً 1 ہے۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

5۔ $S(x) = 45000 + 4500x$

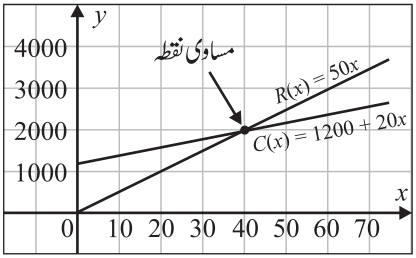


شاہد کی تنخواہ میں سروس کے سال کے ساتھ یکساں اضافہ ہوتا ہے اور ہر سال 4500روپے کا اضافہ ہوتا ہے۔

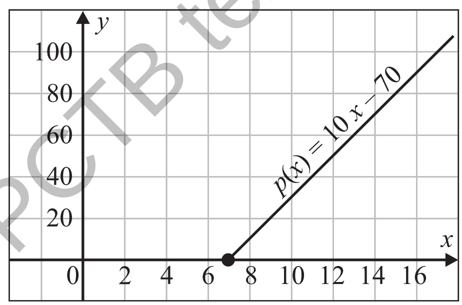
6۔ (a) بیگ $x = 40$

(b) نفع = 6300 روپے

(c)

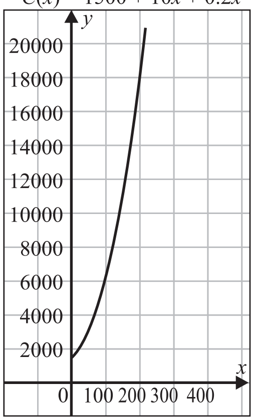


7۔



500اخبارات کے لیے نفع = 4930 روپے

8۔ $C(x) = 1500 + 10x + 0.2x^2$

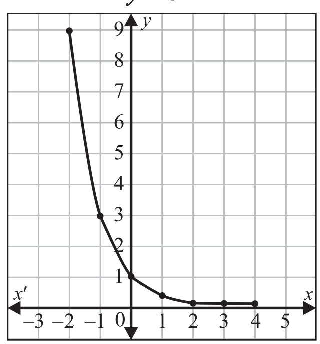


200 قمیضوں کی لاگت = 11500 روپے

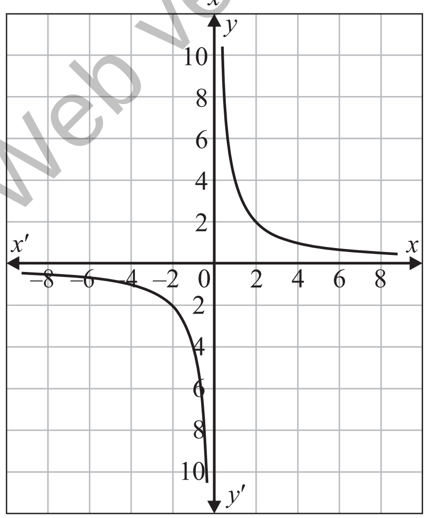
جائزہ مشق 10

1۔ (i) d　(ii) c　(iii) c　(iv) a　(v) a　(vi) b　(vii) a　(viii) d　(ix) b　(x) b

2۔ (i) $y = 3^{-x}$



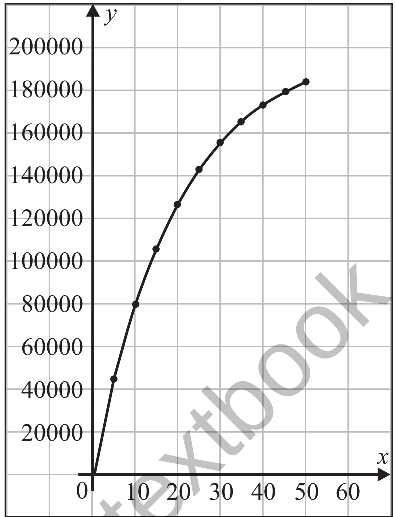
(ii) $y = \frac{2}{x}$



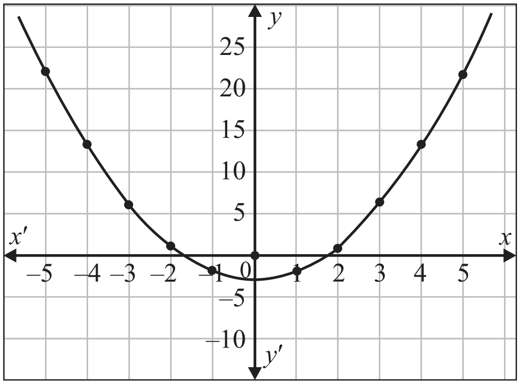
Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

3۔ (a) $S = 200000(1 - e^{-0.05t})$

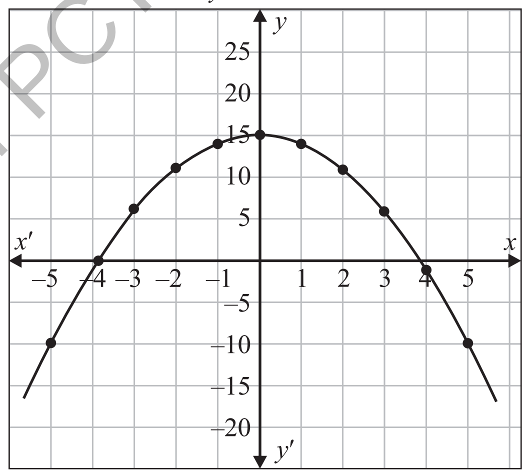


4۔ (a) $y = x^2 - 3$

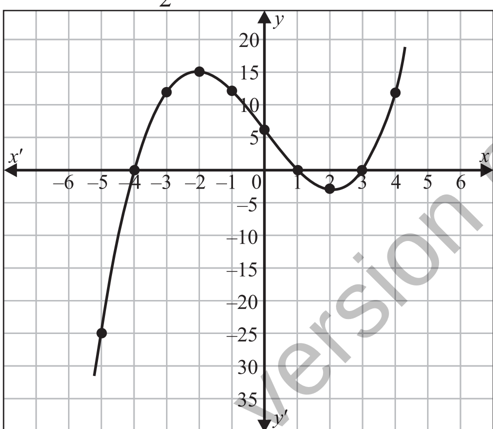


(b) $t = 5$ کے لیے $S = 44239.84$ اور $t = 35$ کے لیے $S = 165245.2$

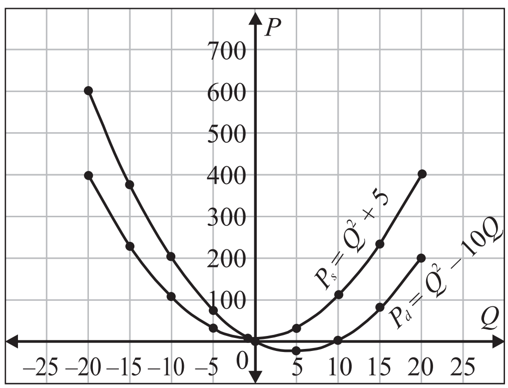
4۔ (b) $y = 15 - x^2$



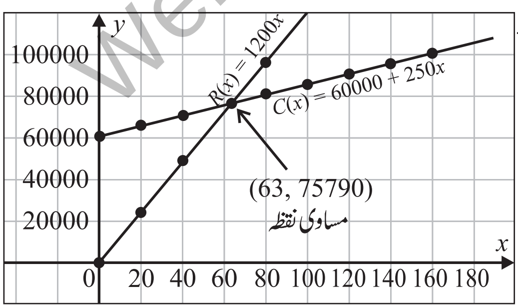
5۔ $y = \frac{1}{2}(x+4)(x-1)(x-3)$



6۔



7۔



نفع = 35000 روپے

Web version of PCTB textbook

جائزہ مشق 11

1۔ (i) b (ii) a (iii) c (iv) a (v) a (vi) a (vii) b (viii) d (ix) c (x) c

مشق 12.1

1۔ (i) 53 (ii) 39 (iii) 36 (iv) 15 اور 6 (v) 5 (vi) (24 – 28) (vii) 44 (viii) 44

2۔

تعدد	ٹیلی نشان	جماعتی حدود
4	||||	144 – 146
3	|||	147 – 149
7	卌 ||	150 – 152
5	卌	153 – 155
4	||||	156 – 158
4	||||	159 – 161
1	|	162 – 164
2	||	165 – 167
$\Sigma f = 30$		کُل تعداد

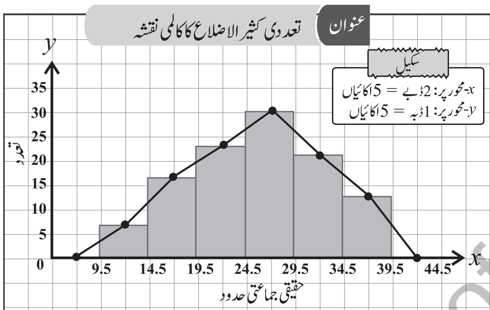
3۔

تعدد	ٹیلی نشان	جماعتی حدود
2	||	15 – 19
3	|||	20 – 24
5	卌	25 – 29
10	卌 卌	30 – 34
6	卌 |	35 – 39
4	||||	40 – 44
$\Sigma f = 30$		کُل تعداد

4۔

تعدد	ٹیلی نشان	جماعتی حدود
1	|	33 – 38
6	卌 |	39 – 44
15	卌 卌 卌	45 – 50
4	||||	51 – 56
6	卌 |	57 – 62
$\Sigma f = 30$		کُل تعداد

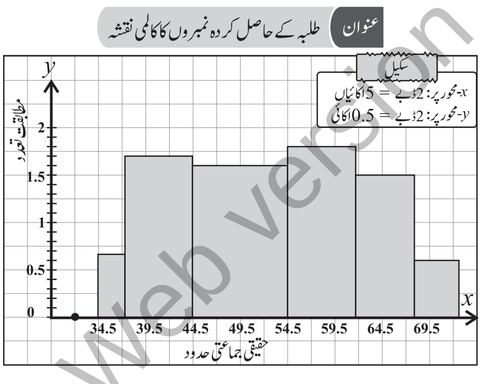
5۔



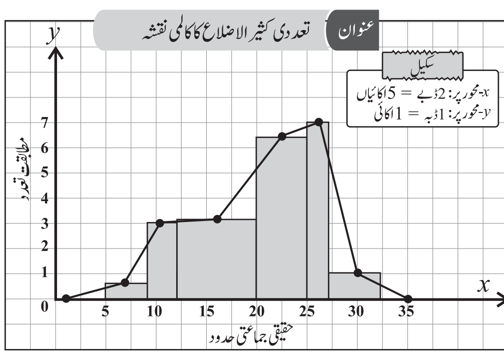
6۔

تعدد	ٹیلی نشان	ہیڈز کی تعداد
5	卌	0
7	卌 ||	1
9	卌 ||||	2
14	卌 卌 ||||	3
9	卌 ||||	4
6	卌 |	5
$\Sigma f = 50$		کُل تعداد

7۔



8۔



مشق 12.2

1۔ (i) 16.67 (ii) $\overline{X} = 0$ (iii) $\overline{X} = 14.04$ (iv) $\overline{X} = 14.57$

2۔ وسطانیہ = 56.5 انچ

3۔ (i) $\overline{X} = 92.1$ (ii) $\tilde{X} = 90$ (iii) $\hat{X} = 95$ اور 90

4۔ (i) $\Sigma f = 84,\ \Sigma fX = 2223,\ \overline{X} = 26.46$

(ii) مجموعی تعدد = 9, 27, 62, 79, 84 ، وسطانیہ = 26.64

5۔ عادہ = 17.44

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

6۔ روپے 450 , روپے 435 , روپے 425 = $\hat{X}$, روپے 437 = $\tilde{X}$, روپے 437 = $\overline{X}$ 7۔ $\Sigma x = 3600$

8۔ کوئی عادہ نہیں , 4 = وسطانیہ , 4.20 = اوسط 9۔ اوسط > وسطانیہ > عادہ

10۔ 154.33 > 156.5 > 160 ، 15.2= اوسط ، 15 = عادہ ، 15 = وسطانیہ

11۔ 15.70 = اوسط، 17.25 = عادہ، 16.11 = وسطانیہ

12۔ 266 سال، 11 ماہ اور 10 دن ، 19 لڑکوں کی اوسط عمر = 13 سال، 3 ماہ اور 4 دن تقریباً

13۔ (i) $\overline{X} = 190$ (ii) $X = 710$ (iii) $\overline{X} = 40$ (iv) $\overline{X} = 123$

14۔ $\overline{X}_{(\text{منال})} = 40$ ، $\overline{X}_{(\text{ماہم})} = 58.6$ ، $\overline{X}_{(\text{حارث})} = 70$ ، حارث انعام کی رقم حاصل کرے گا

15۔ $\overline{X} = 21.17$ 16۔ $\overline{X} = 54.13$ 17۔ $\overline{X}_w = 120.74$ روپے 18۔ $\overline{X}_w = 20.25$ روپے

19۔ ملین 6.6 = اوسط بجٹ 20۔ $\overline{X}_w = 76.9$ نمبر

جائزہ مشق 12

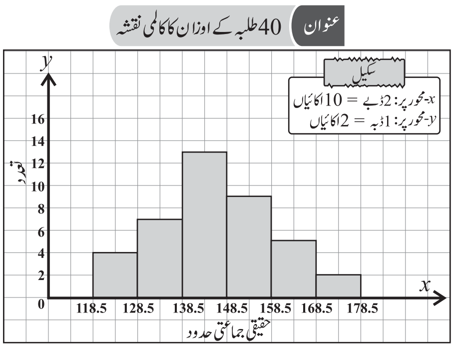
1۔ (i) b (ii) a (iii) d (iv) a (v) d (vi) c (vii) c (viii) d (ix) b (x) a

3۔ (a)

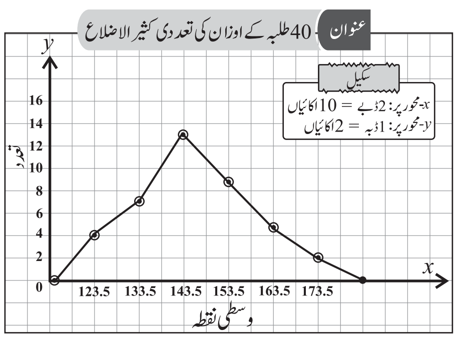
عنوان 10 کی جماعتی حد لے کر تعددی تقسیم کا جدول

جماعتی حدود	ٹیلی نشان	تعدد
119 – 128	||||	4
129 – 138	𝍸 ||	7
139 – 148	𝍸 𝍸 |||	13
149 – 158	𝍸 ||||	9
159 – 168	𝍸	5
169 – 178	||	2
کُل تعداد		$\sum f = 40$

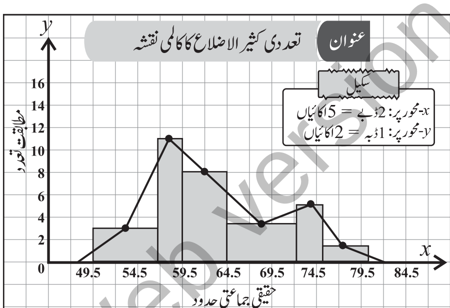
(b)



(c)

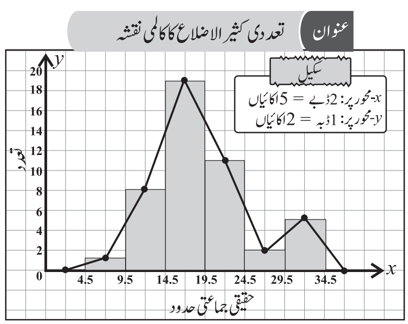


4۔



5۔ (i) 44 (ii) 19.5, 24.5, 29.5, 34.5, 39.5, 44.5 (iii) 22, 27, 32, 37, 42, 47 (iv) 5

6۔



7۔ 473.81 روپے

8۔ ہر شعبہ میں مختص فنڈ کی اوسط رقم 10,000 روپے ہے۔

9۔ 80 نمبر 10۔ 108 kg

11۔ 6 = وسطانیہ ، 6 = عادہ

12۔ 918.09 = اوسط ، 940.46 = وسطانیہ ،
958.33 = عادہ

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

مشق 13.1

1۔ $\frac{2}{3}$ 2۔ (i) $\frac{11}{12}$ (ii) $\frac{11}{36}$ (iii) $\frac{1}{9}$ (iv) $\frac{1}{6}$ 3۔ (i) $\frac{4}{11}$ (ii) $\frac{7}{11}$ (iii) $\frac{1}{11}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{9}{11}$ (vi) $\frac{9}{11}$

4۔ P (3 یا 4 حاصل ہونے کا احتمال) $= \frac{1}{3}$ ، P (3 یا 4 حاصل نا ہونے کا احتمال) $= \frac{2}{3}$ 5۔ (i) $\frac{1}{30}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{11}{30}$ (iv) $\frac{14}{15}$ (v) $\frac{13}{15}$

6۔ 0.15   7۔ (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{1}{6}$ (iv) $\frac{11}{12}$ (v) $\frac{5}{6}$ 8۔ (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{11}{13}$ 9۔ (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{3}{4}$

مشق 13.2

1۔

ہلاکتوں کی تعداد	f	r.f.
0	60	$\frac{30}{147}$
1	50	$\frac{25}{147}$
2	87	$\frac{29}{98}$
3	40	$\frac{20}{147}$
4	32	$\frac{16}{147}$
5	15	$\frac{5}{98}$
6	10	$\frac{5}{147}$
کُل تعداد	$\Sigma f = 294$	

2۔

ناقص مصنوعات کی تعداد فی نمونہ	f	r.f.
0	120	$\frac{4}{25}$
1	140	$\frac{14}{75}$
2	94	$\frac{47}{375}$
3	85	$\frac{17}{150}$
4	105	$\frac{21}{150}$
5	50	$\frac{1}{15}$
6	40	$\frac{4}{75}$
7	66	$\frac{11}{125}$
8	50	$\frac{1}{15}$
کُل تعداد	$\sum f = 750$	

3۔

X	f	r.f.
0	10	$\frac{1}{10}$
1	23	$\frac{23}{100}$
2	15	$\frac{3}{20}$
3	25	$\frac{1}{4}$
4	18	$\frac{9}{50}$
5	09	$\frac{9}{100}$
کُل تعداد	$\Sigma f = 100$	

4۔ (i) 37% (ii) 19% (iii) تازہ جوس (iv) بریانی   5۔ $83.33 \approx 83$ 6۔ 60 روپے

7۔

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	0.11	0.21	0.17	0.18	0.09	0.17	0.07
مطابقت تعدد	22	42	34	36	18	34	14

8۔ 80 مرتبہ

جائزہ مشق 13

1۔ (i) c (ii) b (iii) c (iv) a (v) a (vi) c (vii) b (viii) c (ix) d (x) b   3۔ (i) $\frac{5}{23}$

(ii) $\frac{10}{23}$ (iii) $\frac{8}{23}$ (iv) $\frac{13}{23}$ (v) $\frac{18}{23}$ 4۔ (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{5}{8}$ 5۔ (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{25}{26}$

6۔

ٹیل کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6	کُل تعداد
f	110	90	105	80	76	123	16	$\Sigma f = 600$
نسبتی تعدد	$\frac{11}{60}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{19}{150}$	$\frac{41}{200}$	$\frac{2}{75}$	

7۔ غیر ناقص اشیا کی متوقع تعدد = 17 ، نسبتی تعدد $= \frac{17}{25} = 0.68$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

فرہنگ (Glossary)

استخراجی ثبوت(Deductive Proof): ایک ایسا طریقہ ہے جس کے ذریعے ایسے مفروضوں سے نتائج اخذ کیے جاتے ہیں جو درست سمجھے جاتے ہیں۔ اگر مفروضہ درست ہوں تو نتیجہ بھی لازمی طور پر درست ہو گا۔

استنباط یا مشروط(Implication or conditional): اگر کوئی مرکب بیان اس صورت میں ہو کہ "اگر p ہو تو q" $(p \rightarrow q)$ ، جسے p کا مطلب q کے طور پر بھی لکھا جاتا ہے، اسے استنباط یا مشروط بیان کہا جاتا ہے۔ p کو پیشرو یا مفروضہ کہا جاتا ہے، اور q کو نتیجہ یا اختتام کہا جاتا ہے۔ ایک مشروط کو صرف اس وقت غلط سمجھا جاتا ہے جب مفروضہ درست ہو اور نتیجہ غلط ہو۔

اقلیدسی اشکال کا سلسلہ / پچی کاری(Tessellation): اقلیدسی شکلوں کا سلسلہ / پچی کاری ایک ایسا نمونہ ہے جو مستوی کو کسی بھی خلا اور متجاوز کیے بغیر مکمل طور پر ڈھانپ لیتا ہے۔

اندرونی مرکز(Incentre): مثلث کے ناصف زاویوں کے ہم آہنگ نقطہ کو مثلث کا اندرونی مرکز کہا جاتا ہے۔

حقیقی عدد کا لوگارتھم (Logarithm of a Real Number): عدد x کا b اساس پر لوگارتھم y ہے: اس کا مطلب ہے کہ جب b کا قوت نما y ہو تو یہ x کے برابر ہوتا ہے۔ لوگارتھمی شکل اور اس کے مساوی قوت نمائی شکل کے درمیان تعلق نیچے دیا گیا ہے:

$$b^y = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_b(x) = y$$ جبکہ $x > 0, b > 0$ اور $b \neq 1$

ایک دیے گئے مشروط جملے سے متعلق مشروط جملے(Conditionals related with a given conditional): اگر p اور q بیانات ہوں اور $p \rightarrow q$ ایک دیا گیا مشروط ہو، تب

i. $q \rightarrow p$ کو $p \rightarrow q$ کا الٹ(converse) کہا جاتا ہے۔

ii. $\sim p \rightarrow \sim q$ کو $p \rightarrow q$ کا معکوس(inverse) کہا جاتا ہے۔

iii. $\sim q \rightarrow \sim p$ کو $p \rightarrow q$ کا ضد مثبت(contrapositive) کہا جاتا ہے۔

اینٹی لوگارتھم(Antilogarithm): لوگارتھم کے معکوس عمل کو اینٹی لوگارتھم کہتے ہیں۔

بیان(Statement): ایک جملہ یا ریاضیاتی عبارت جو درست یا غلط ہو مگر دونوں نہیں ہو سکتے، کو بیان کہا جاتا ہے۔

تجربہ(Experiment): وہ عمل جو نتائج پیدا کرتا ہے۔ مثلاً سکّہ اچھالنا، ڈائس کا پھینکنا وغیرہ کو تجربہ کہا جاتا ہے۔

تعددی کثیر الاضلاع(Frequency Polygon): تعددی کثیر الاضلاع ایک جیومیٹریکل بند شکل ہے جو تعددی تقسیم کو گراف کے طور پر ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوتی ہے۔

تقاطع نقطہ(Point of concurrency): ہم آہنگ نقطہ وہ واحد مقام ہے۔ جہاں تین یا زیادہ خطوط، شعاعیں یا قطعہ خطوط ایک جیومیٹری شکل میں آپس میں قطع کرتے یا ملتے ہیں۔

ثنائی ربط(Binary Relation): سیٹ $A \times B$ کا کوئی بھی تحتی سیٹ ثنائی ربط کہلاتا ہے یا محض **ربط** کہلاتا ہے، جو A سے B کی طرف ہوتا ہے۔

الجبری جملہ کا جذر المربع(Square Root of an Algebraic Expression): الجبری جملہ کے جذر المربع سے مراد ایک ایسی قدر ہے جسے خود سے ضرب کرنے سے اصل جملہ حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرح جیسے کسی عدد کا جذر المربع معلوم کیا جاتا ہے۔

خاصہ(Characteristic): خاصہ لوگارتھم کا صحیح عددی حصہ ہوتا ہے۔ یہ ہمیں بتاتا ہے کہ عدد کتنا بڑا یا چھوٹا ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP

Web version of PCTB textbook

خط کا ڈھلوان یا میلان(Slope or Gradient of a Line): ڈھلوان یا جھکاؤ کی پیمائش (چڑھائی کے فاصلے کا افقی فاصلے سے تناسب) کو مائل راستے کی ڈھلوان یا میلان کہا جاتا ہے۔

دائروی پیمائش (ریڈین)(Circular Measure (Radian)): کسی ایسی قوس کے ذریعے دائرے کے مرکز پر بنا ہوا زاویہ جس کی پیمائش اُس دائرے کے رداس کے برابر ہو "ریڈین" کہلاتی ہے۔

دو شرطی $p \leftrightarrow q$ (Biconditional): بیان $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$ کو مختصر طور پر $p \leftrightarrow q$ لکھا جاتا ہے اور اسے دو شرطی یا برابری کہا جاتا ہے۔

ڈگری(Degree): ڈگری ($^\circ$) زاویوں کی پیمائش کی اکائی ہے۔ یہ ایک نقطہ کے گرد پورے چکر کا $\left(\frac{1}{360}\right)^{\text{th}}$ کے برابر ہے۔

ڈومین(Domain): مترتب جوڑوں کے پہلے ارکان کا سیٹ جو کہ ثنائی ربط بناتا ہے، اس سیٹ کا ڈومین کہلاتا ہے۔

رینج(Range): مترتب جوڑوں کے دوسرے ارکان کا سیٹ جو کہ ثنائی ربط بناتا ہے، اس سیٹ کی رینج کہلاتا ہے۔

سائنسی ترقیم(Scientific Notation): سائنسی ترقیم میں ایک عدد کو $a \times 10^n$ لکھا جاتا ہے۔ جب کہ $1 \leq a < 10$ اور n ایک صحیح عدد ہو۔ یہاں "a" عددی سر یا بنیادی عدد کہلاتا ہے۔

سیمپل اسپیس(Sample Space): ایک تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کے سیٹ کو سیمپل اسپیس کہتے ہیں۔

عام لوگارتھم(Common Logarithm): عام لوگارتھم ایسے لوگارتھم ہوتے ہیں جن کی اساس 10 ہوتی ہے۔ ان کو $\log_{10}$ یا $\log$ کے طور پر لکھا جاتا ہے (جب لوگارتھم کی اساس نہ لکھی ہو تو اسے عام طور پر اساس 10 ہی سمجھا جاتا ہے)۔

عمودی مرکز(Orthocentre): مثلث کے ارتفاعات کا ہم آہنگ نقطہ عمودی مرکز کہلاتا ہے۔

غیر انفال(Disjunction): p اور q کے غیر انفال کو علامتی طور پر $p \vee q$ (p یا q) لکھا جاتا ہے۔ جب دیے گئے بیانات میں سے کم از کم ایک درست ہو تو غیر انفال $p \vee q$ کو درست سمجھا جاتا ہے۔ جب یہ دونوں غلط ہوں تو ان کو غلط سمجھا جائے گا۔

غیر مختتم اور متوالی کسور اعشاریہ(Non-Terminating and Recurring Decimal Numbers): ایسے اعشاری اعداد جن کے اعشاریہ کے بعد ہندسوں کی تعداد لامتناہی ہو اور جس کے کسری حصے میں ہندسوں کی تکرار ایک ترتیب میں ہو غیر مختتم اور متوالی کسور اعشاریہ کہلاتی ہیں۔

غیر منفی رکاوٹیں(Non-negative constraints): روزمرہ کی زندگی کے مسائل سے متعلق یک درجی غیر مساوات کے نظام میں استعمال ہونے والے متغیرات غیر منفی ہوتے ہیں اور انہیں غیر منفی رکاوٹیں کہا جاتا ہے۔

قابل عمل حل(Feasible solution): قابل عمل خطے کے ہر نقطہ کو یک درجی غیر مساوات کے نظام کا ایک قابل عمل حل کہا جاتا ہے۔

قابل عمل خطہ(Feasible region): ایک ایسا خطہ جو پہلے ربع تک محدود ہو اسے دی گئی رکاوٹوں کے سیٹ کے لیے قابل عمل خطہ کہا جاتا ہے۔

قدرتی لوگارتھم(Natural Logarithm): اساس e والے لوگارتھم کو قدرتی لوگارتھم کہا جاتا ہے جب کہ e ایک ریاضیاتی مستقل مقدار ہے جو تقریباً 2.71828 کے برابر ہے۔

قیاس(Conjecture): قیاس ایک ریاضیاتی بیان یا مفروضہ ہوتا ہے جو مشاہدات کی بنیاد پر درست مانا جاتا ہے لیکن ابھی تک اس کا ثبوت فراہم نہیں کیا گیا۔

کثیر الاضلاع کی مماثلت(Similarity of Polygons): متشابہ اشکال ایک جیسی ہوتی ہیں۔ لیکن ضروری نہیں کہ اُن کا سائز ایک جیسا ہو۔

کلیہ متعارفہ(Axiom): کلیہ متعارفہ ایک ریاضیاتی بیان ہے جسے ہم بغیر کسی ثبوت یا دلیل کے درست مانتے ہیں۔

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

کنجکشن(Conjunction): دو بیانات p اور q کے کنجکشن کو علامتی طور پر $p \wedge q$ لکھا جاتا ہے۔ یہ صرف اسی صورت میں درست سمجھا جاتا ہے جب دونوں بیانات درست ہوں۔

لوکس(Locus): لوکس نقاط کا ایسا مجموعہ ہوتا ہے جو ایک مقررہ قاعدے کی پیروی کرتا ہے۔

متشابہ اجسام(Similar Solids): دو اجسام اسی وقت متشابہ ہوتے ہیں اگر اُن کی شکل ایک جیسی ہو لیکن ممکنہ حد تک سائز مختلف ہوں اور اگر اُن کے متناظرہ اضلاع کی لمبائیاں تناسب میں ہوں یعنی متناظرہ لمبائیوں کی نسبت برابر ہو۔

متوقع تعدد(Expected Frequency): متوقع تعدد ایسا پیمانہ ہے جس کا انحصار احتمال پر ہوتا ہے۔ اور یہ اندازہ لگاتا ہے کہ کوئی واقعہ کتنی بار پیش آنا چاہیے۔

محاصرہ مرکز (Circumcenter): مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصفوں کا ہم آہنگ نقطہ محاصرہ مرکز کہلاتا ہے۔

مختتم کسور اعشاریہ(Terminating Decimal Numbers): ایسے اعشاری اعداد جن کے اعشاریہ کے بعد ہندسوں کی تعداد متناہی ہو مختتم کسور اعشاریہ کہلاتی ہیں۔

مرکز نما(Centroid): مثلث کے وسطانیہ کے ہم مرکز نقطہ کو مثلث کا مرکز نما کہا جاتا ہے۔

مرکزی رجحان کی پیمائش((Measures of Location (Central Tendency)): وہ پیمانہ جو مواد کو مرکز دیتا ہے۔ مرکزی رُجحان کا پیمانہ کہلاتا ہے لہٰذا، مواد کی درمیانی یا مرکزی قدر معلوم کرنے کے لیے مرکزی رُجحان کی پیمائش کا استعمال کیا جاتا ہے

مسئلہ غیر مساوی مثلث(Triangle Inequality Theorem): مثلث کے کوئی سے دو اضلاع کی پیمائش کا مجموعہ ہمیشہ تیسرے ضلع کی پیمائش سے بڑا ہوتا ہے۔

مسئلہ کی رکاوٹیں(Problem constraints): روزمرہ زندگی سے کسی خاص مسئلے سے نمٹنے کے لیے، مسئلہ سے متعلق یک درجی غیر مساوات کو مسئلہ کی رکاوٹ کا نام دیا جاتا ہے۔

مسئلہ(Theorem): مسئلہ ایک ریاضیاتی بیان ہے جسے پہلے سے معلوم حقائق کی بنیاد پر سچ ثابت کیا گیا ہو۔

منطق(Logic): منطق استدلال کا ایک منظم طریقہ ہے جو کسی کو بیانات کے معانی کی تشریح کرنے، ان کی سچائی کو جانچنے اور موجودہ سے نئی معلومات اخذ کرنے کے قابل بناتا ہے۔

مینٹیسا(Mantissa): مینٹیسا لوگارتھم کا کسری حصہ ہوتا ہے اور یہ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

نتائج(Outcomes): کسی تجربہ کے حاصل کو نتائج کہتے ہیں۔ مثلاً سکّے اچھالنے کے ممکنہ نتائج ہیڈ اور ٹیل ہوتے ہیں۔

نسبتی / متعلقہ تعدد(Relative Frequency): نسبتی تعدد ہمیں بتاتی ہے کہ کیسے ایک مخصوص واقعہ کل تعداد کے مقابلے میں کتنی بار آتا ہے۔

نفی(Negation): اگر p کوئی بھی بیان ہو، تو اس کی نفی کو $\sim p$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جسے "p نہیں" پڑھا جاتا ہے۔ اس تعریف سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر p سچ ہو، تو $\sim p$ غلط ہو گا، اور اگر p غلط ہو، تو $\sim p$ سچ ہو گا۔

واقعہ(Event): کسی تجربہ کے نتائج کا سیٹ واقعہ کہلاتا ہے۔

یک درجی تفاعل(Linear Functions): یک درجی تفاعل ایک کثیر رکنی تفاعل ہوتا ہے جس کا درجہ 1 ہو۔

یک درجی مساوات(Linear Equation): ایسی مساوات جو $ax + b = 0$ کی شکل میں ہو جہاں 'a' اور 'b' مستقلات ہیں $a \neq 0$ اور 'x' ایک متغیر ہے، اسے ایک متغیر میں یک درجی مساوات کہا جاتا ہے۔ یک درجی مساوات میں متغیر کی سب سے زیادہ طاقت ہمیشہ 1 ہوتی ہے۔

NOT FOR SALE-PESRP
Web version of PCTB textbook

Notations / علامات

مراد	علامات
برابر ہے	$=$
برابر نہیں ہے	$\neq$
کا رکن ہے	$\in$
کا رکن نہیں ہے	$\notin$
اور	$\wedge$
یا	$\vee$
یونین	$\cup$
تقاطع	$\cap$
بڑا ہے	$>$
چھوٹا ہے	$<$
چھوٹا ہے یا برابر ہے	$\leq$
بڑا ہے یا برابر ہے	$\geq$
بڑا نہیں ہے	$\ngtr$
چھوٹا نہیں ہے	$\nless$
جیسا کہ	$\mid$
تحتی سیٹ	$\subseteq$
تحتی سیٹ نہیں ہے	$\not\subset$
واجب تحتی سیٹ	$\subset$
فوقی سیٹ	$\supseteq$
فوقی سیٹ نہیں ہے	$\not\supset$
خالی سیٹ	$\{\ \}$ یا $\varnothing$
پس / نتیجہ	$\therefore$
اگرچہ / چوں کہ	$\because$
تقریباً برابر ہے	$\approx$
کے متشابہ ہے	$\sim$
صرف اگر، تو	$\Rightarrow$
صرف اور صرف اگر	$\Leftrightarrow$
x کی مطلق قیمت	$\lvert x \rvert$
جذرالمربع	$\sqrt{\ }$

مراد	علامات
تمام کے لیے	$\forall$
پائی	π
آیلر مستقل	e
ڈگری سینٹی گریڈ	$^\circ C$
ڈگری فارن ہایٹ	$^\circ F$
لوگارتھم	$\log$
قدرتی لوگارتھم	$\ln$
قطعہ خط AB	$\overline{AB}$
قطعہ خط AB کی پیمائش	$m\overline{AB}$
شعاع AB	$\overrightarrow{AB}$
خط AB	$\overleftrightarrow{AB}$
زاویہ ABC	$\angle ABC$
زاویہ ABC کی پیمائش	$m\angle ABC$
مثلث ABC	ΔABC
قطعہ خط $\overline{AB}$ کی پیمائش	$\lvert\overline{AB}\rvert$
قوس AB	$\overset{\frown}{AB}$
متوازی ہے	$\parallel$
متوازی نہیں ہے	$\nparallel$
عمود ہے	$\perp$
اگر . . . تب، مطلب	$\rightarrow$
تھیٹا	θ
فائی	ϕ
الفا	α
ڈگری	$^\circ$
ٹیلی نشان	$\mid$
حسابی اوسط	$\overline{X}$
اوزانی اوسط	$\overline{X}_w$
وسطانیہ	$\widetilde{X}$
عادہ	$\widehat{X}$

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(Logarithm Table) لوگارتھم جدول

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(Mean Difference) اوسط فرق								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	37
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969					3	7	11	14	18	21	25	28	32
							1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	12	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553							3	6	9	12	15	18	21	24	28
					1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903					3	6	9	11	14	17	20	23	26
							1931	1959	1987	2014	3	5	8	11	14	16	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	15	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430					3	5	8	10	13	15	18	20	23
							2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	19	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	1S
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(Mean Difference) اوسط فرق								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

(Antilogarithm Table) اینٹی لوگارتھم جدول

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	اوسط فرق (Mean Difference) 1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	اوسط فرق (Mean Difference)								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Web version of PCTB textbook

NOT FOR SALE-PESRP